

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 13 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Μονάδες 11

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "Σωστό" ή "Λάθος" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία:

$$a^2 < b^2 + c^2, \text{ αν και μόνον αν } \hat{A} > 90^\circ.$$

β. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

γ. Αν δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου (Ο, R) ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει:

$$PA \cdot PB = PG \cdot PD.$$

δ. Η πλευρά λ_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) δίνεται από την ισότητα $\lambda_4 = R\sqrt{2}$.

Μονάδες 8

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Γ1. Το εμβαδόν κυκλικού τομέα (ΟΑΒ) κέντρου Ο και ακτίνας R με επίκεντρη γωνία μ° δίνεται από την ισότητα

A. $(ΟΑΒ) = \frac{\pi R \mu}{180}$. B. $(ΟΑΒ) = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$. Γ. $(ΟΑΒ) = \pi R^2 \mu$.

Μονάδες 3

Γ2. Το απόστημα α_6 κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) είναι:

A. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{R}{2}$. Γ. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και σημείο Σ εκτός αυτού, που απέχει από το κέντρο Ο του κύκλου απόσταση **ΟΣ=10**. Από το Σ φέρουμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου ώστε ΣΑ=6, ΣΒ=x-3, ΣΓ=4, ΓΔ=x, και την εφαπτομένη του κύκλου ΣΕ.

Να υπολογίσετε:

α. το x.

Μονάδες 10

β. την ακτίνα του κύκλου R.

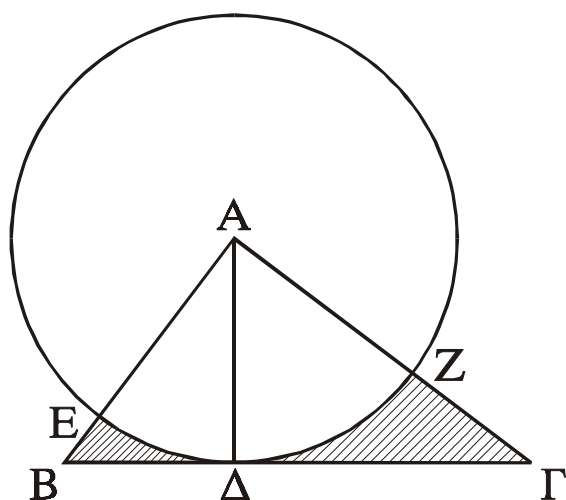
Μονάδες 8

γ. το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΣΕ.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) ο λόγος των κάθετων πλευρών του AB και $A\Gamma$ είναι $\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{3}{4}$ και η προβολή $B\Delta$ της κάθετης πλευράς AB στην υποτείνουσα $B\Gamma$ είναι 9. Με κέντρο την κορυφή A και ακτίνα το ύψος $A\Delta$ γράφουμε κύκλο $(A, A\Delta)$, που τέμνει τις κάθετες πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα.



Να υπολογίσετε:

α. τα μήκη των τμημάτων $\Delta\Gamma$ και $A\Delta$.

Μονάδες 12

β. το άθροισμα των εμβαδών των μικτογράμμων τριγώνων $B\Delta E$ και $\Delta\Gamma Z$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$. Αν M και N είναι τα μέσα των βάσεων AB , $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα και O τυχαίο σημείο του τμήματος MN , τότε να αποδείξετε ότι:

α. τα τρίγωνα $OB\Gamma$ και $OA\Delta$ έχουν ίσα εμβαδά.

Μονάδες 13

- β. αν το Ο είναι το μέσο του τμήματος ΜΝ, ισχύει $(ΑΟΔ) = \frac{1}{4} (ΑΒΓΔ)$.

Μονάδες 12

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Διευκρίνιση στο **ΘΕΜΑ 2**: Η απόσταση $O\Sigma$ αντί $O\Sigma=10$ να γίνει $O\Sigma=20$.

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογώνιου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Μονάδες 11

- B.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στο σωστό τύπο.

Στήλη I	Στήλη II
α. Εμβαδόν τραπεζίου	1. $E = \tau \rho$
β. Εμβαδόν τριγώνου	2. $E = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$
γ. Εμβαδόν κανονικού πολυγώνου	3. $E = \frac{(B + \beta) \nu}{2}$
	4. $E = \frac{1}{2} P_{\nu} \alpha_{\nu}$
	5. $E = \alpha \nu_{\alpha}$

Στη **Στήλη II** περισσεύουν δύο τύποι.

Μονάδες 6

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**", αν η πρόταση είναι σωστή, και "**Λάθος**", αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$$

β. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R με πλευρά λ_n και απόστημα α_n ισχύει η σχέση:

$$\alpha_n^2 + \frac{\lambda_n^2}{2} = R^2.$$

γ. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.

δ. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται κανονικό πολύγωνο $A_1 A_2 \dots A_n$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα R. Αν η γωνία του πολυγώνου είναι $\varphi_n = 150^\circ$, να βρείτε:

α. Τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου.

Μονάδες 10

β. Την κεντρική γωνία του πολυγώνου ω_n .

Μονάδες 8

γ. Το εμβαδόν του πολυγώνου συναρτήσει της ακτίνας R.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών $\gamma=2$, $\beta=1+\sqrt{2}$ και εμβαδόν $(AB\Gamma) = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$.

α. Να αποδείξετε ότι το μήκος της πλευράς $a = \sqrt{3}$.

Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$.

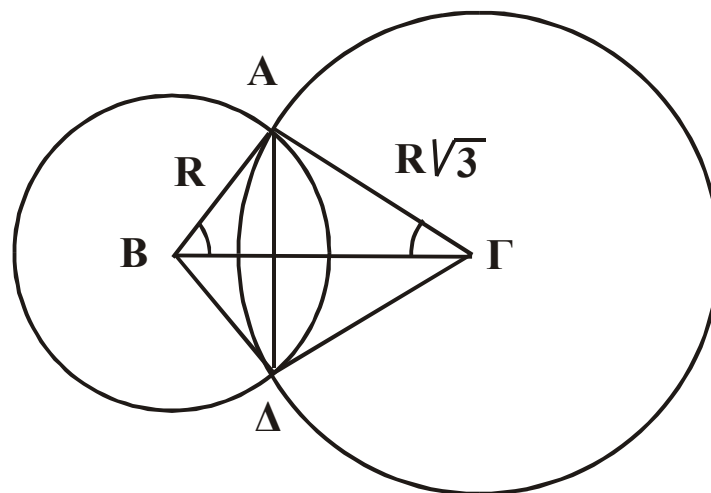
Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς AB πάνω στη πλευρά $B\Gamma$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με μήκη πλευρών $AB=R$ και $A\Gamma = R\sqrt{3}$. Γράφουμε τους κύκλους (B, R) και $(\Gamma, R\sqrt{3})$.



Να υπολογίσετε:

α. Το μήκος της πλευράς $B\Gamma$ συναρτήσει του R .

Μονάδες 4

β. Τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

Μονάδες 4

γ. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου $AB\Delta\Gamma$ συναρτήσει του R .

Μονάδες 8

δ. Το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κύκλων συναρτήσει του R .

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10:30 πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 11 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Μονάδες 11

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "Σωστό" ή "Λάθος" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2, \text{ αν και μόνο αν } \hat{A} < 1\text{L}.$$

Μονάδες 2

- β.** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Μονάδες 2

- γ.** Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ με μήκη πλευρών α, β, γ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4\rho}$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Μονάδες 2

- δ.** Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

Μονάδες 2

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη I	Στήλη II
α. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R	1. $\frac{\pi R^2 \mu}{180}$
β. Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° και ακτίνας R	2. $2\pi R$
γ. Μήκος κύκλου ακτίνας R	3. πR^2
	4. $\frac{\pi R^2 \mu}{360}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $ΑΓ = 2\sqrt{3}$, $ΒΓ = 1$ και γωνία $\Gamma = 30^\circ$.

α. Να αποδείξετε ότι $ΑΒ = \sqrt{7}$.

Μονάδες 13

β. Να υπολογίσετε τη διάμεσο $\Gamma Μ = \mu_\gamma$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και σημείο Α, ώστε $ΟΑ = R\sqrt{13}$. Από το σημείο Α φέρουμε τέμνουσα ΑΔΕ του κύκλου που τέμνει αυτόν στα σημεία Δ και Ε. Αν $ΑΔ = 2ΔΕ$, να υπολογίσετε:

α. τη χορδή ΔΕ, ως συνάρτηση του R .

Μονάδες 13

β. το λόγο των εμβαδών $\frac{(ΟΑΔ)}{(ΟΕΔ)}$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος (O, R) και μία διάμετρος του $ΑΓ$. Η μεσοκάθετος της ακτίνας $ΟΑ$ τέμνει τον κύκλο στα σημεία $Β, Δ$, όπως στο παρακάτω σχήμα.

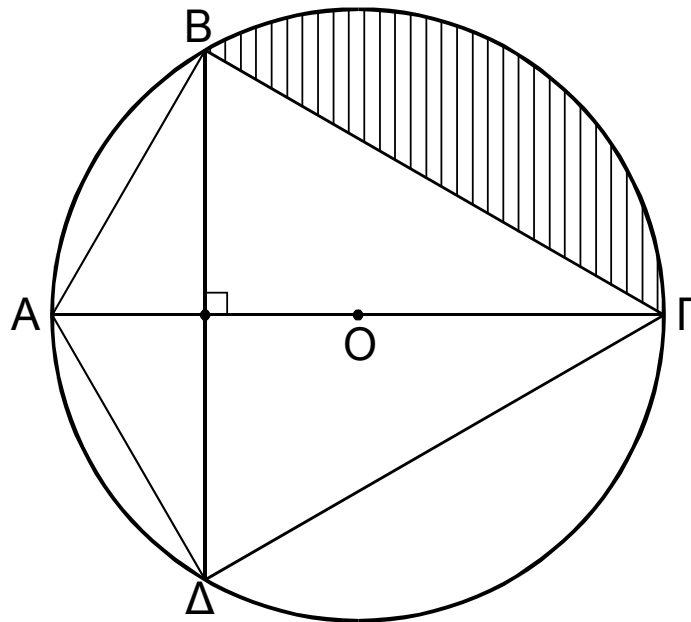
α. Να αποδείξετε ότι $ΒΔ = R\sqrt{3}$.

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του R , το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ΑΒΓΔ$.

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του R , το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος.



Μονάδες 9

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 7 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω ένας κύκλος (O, R) .

α. Στον κύκλο (O, R) να εγγράψετε τετράγωνο.

Μονάδες 4

β. Να αποδείξετε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$, όπου λ_4 η πλευρά του τετραγώνου.

Μονάδες 4

γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, όπου α_4 το απόστημα του τετραγώνου.

Μονάδες 4

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "Σωστό" αν η πρόταση είναι σωστή και "Λάθος" αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο της ομοιότητας.

Μονάδες 2

β. Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

Μονάδες 2

- γ. Η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R) ορίζεται με τον τύπο:

$$\Delta_{(O,R)}^P = R^2 + OP^2.$$

Μονάδες 2

- δ. Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Μονάδες 2

- Γ. Ποιο πολύγωνο λέγεται κανονικό;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB=A\Gamma=1$ και $B\Gamma=\sqrt{3}$.
Να υπολογίσετε:

- α. τη γωνία $\hat{A}$

Μονάδες 9

- β. το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

Μονάδες 9

- γ. τη διάμεσο $BM = \mu_\beta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ τέτοιες, ώστε να ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$. Αν η διάμεσος AM τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$ στο E ,

- α. να εκφράσετε τη διάμεσο AM ως συνάρτηση της πλευράς α

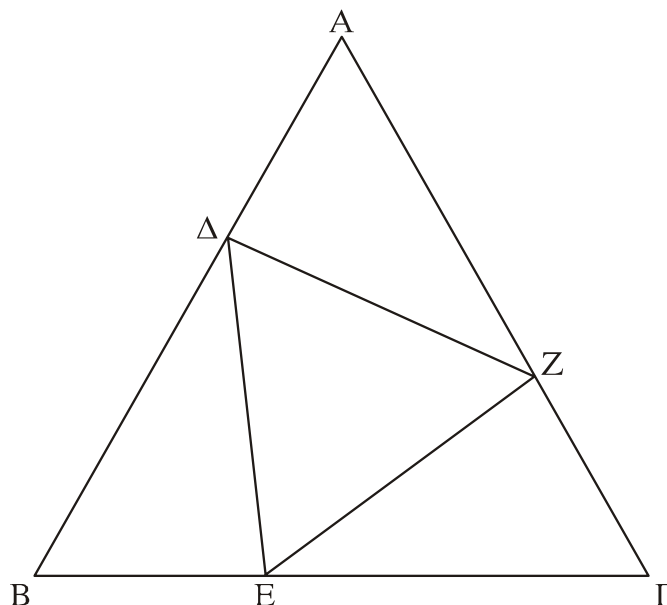
Μονάδες 12

β. να αποδείξετε ότι $AM \cdot AE = \frac{3\alpha^2}{2}$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$, πλευράς α . Στις πλευρές AB , $B\Gamma$, ΓA παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ , E , Z τέτοια, ώστε να είναι $A\Delta = BE = \Gamma Z = \frac{1}{3}\alpha$, όπως στο διπλανό σχήμα.



Να υπολογίσετε το εμβαδόν ως συνάρτηση του α :

α. του τριγώνου $A\Delta Z$

Μονάδες 9

β. του τριγώνου ΔEZ

Μονάδες 7

γ. του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $AB\Gamma$.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μετά την 10.30 πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

Μονάδες 11

- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Έστω AB και $\Gamma\Delta$ χορδές ενός κύκλου. Αν οι χορδές αυτές ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο P , τότε ισχύει:

$$PA \cdot P\Delta = PB \cdot P\Gamma$$

- β.** Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δυο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

- γ.** Η γωνία κανονικού n -γώνου είναι:

$$\varphi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

- δ.** Σε κάθε κανονικό n -γωνο ακτίνας R , πλευράς λ_n και

αποστήματος α_n ισχύει η σχέση $\lambda_n^2 + \frac{\alpha_n^2}{4} = R^2$.

Μονάδες 8

Γ. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

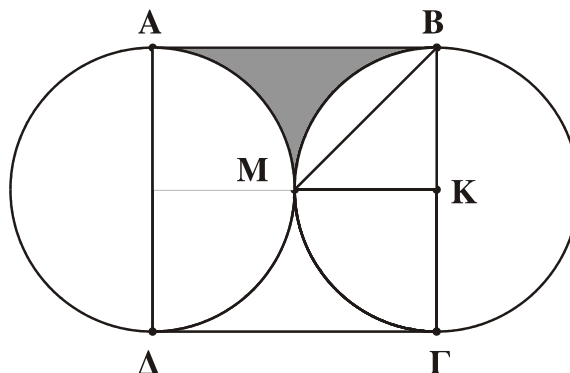
Στήλη I: κανονικό πολύγωνο	Στήλη II: πλευρά λ_n
α. κανονικό εξάγωνο	1. $R\sqrt{2}$
β. ισόπλευρο τρίγωνο	2. $\frac{R\sqrt{2}}{2}$
γ. τετράγωνο	3. $R\sqrt{3}$
	4. $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
	5. R

όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού πολυγώνου.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 4cm . Με διαμέτρους $A\Delta$ και $B\Gamma$ γράφουμε κύκλους που εφάπτονται στο σημείο M , όπως φαίνεται στο σχήμα:



Να υπολογίσετε:

α. Το εμβαδόν του τριγώνου MKB , όπου K το μέσο της $B\Gamma$.

Μονάδες 12

β. Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου AMB .

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές α, β, γ ισχύει $3\beta^2 + 2\gamma^2 = 2\alpha^2$.
Να αποδείξετε ότι:

α. Ισχύει η σχέση $\mu_{\alpha}^2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}$, όπου μ_{α} η διάμεσος στην πλευρά α .

Μονάδες 8

β. $\hat{A} > 90^\circ$.

Μονάδες 7

γ. Η προβολή $M\Delta$ της διαμέσου $B\Delta$ στην πλευρά β είναι ίση με $\frac{3}{4}\beta$.

Μονάδες 10**ΘΕΜΑ 4ο**

Τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) .
Έστω E ένα σημείο της $A\Delta$, τέτοιο ώστε $A\Delta = \sqrt{3}AE$ και Z το σημείο τομής της προέκτασης της BE με τον κύκλο.

α. Να εκφράσετε το ευθύγραμμο τμήμα BE ως συνάρτηση της πλευράς α του τετραγώνου.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $EZ = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \alpha$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε, ως συνάρτηση του α , το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $\hat{\Delta O Z}$.

Μονάδες 10

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 1 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

Μονάδες 10

A2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" ή "**Λάθος**" δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R), αν και μόνο αν $\Delta_{(O,R)}^P > 0$, όπου $\Delta_{(O,R)}^P$ η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R).

Μονάδα 1

β. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2, \text{ αν και μόνο αν } \hat{A} < 90^\circ.$$

Μονάδα 1

γ. Το εμβαδόν E κάθε τριγώνου ABΓ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2} \alpha \beta \eta \mu B$.

Μονάδα 1

δ. Σε κύκλο (O, R), το εμβαδόν E κυκλικού τομέα μ° δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\pi R^2 \mu}{180}$.

Μονάδα 1

ε. Το 1ο θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τον τύπο: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_\alpha^2}{2}$.

Μονάδα 1

Β. α. Να εγγραφεί κανονικό εξάγωνο σε κύκλο (Ο, R) και να αποδείξετε ότι $\lambda_6 = R$, όπου λ_6 η πλευρά του εξαγώνου.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, όπου α_6 το απόστημα του εξαγώνου.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α , β , γ και διάμεσο $AM = \mu_\alpha$. Αν ισχύει η σχέση $2\mu_\alpha^2 - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2}$,

α. να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$,

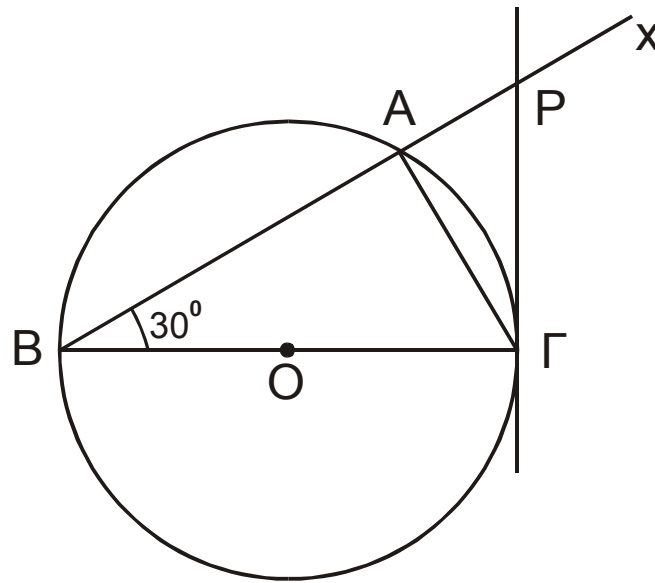
Μονάδες 15

β. να υπολογιστεί η γωνία $\hat{A}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, δίνεται κύκλος (Ο, R) διαμέτρου ΒΓ και ημιευθεία Βx τέτοια, ώστε η γωνία ΓΒx να είναι 30° . Έστω ότι η Βx τέμνει τον κύκλο στο σημείο Α. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Γ, η οποία τέμνει τη Βx στο σημείο Ρ.



Να αποδείξετε ότι:

α. $AG = R$.

Μονάδες 5

β. $\frac{(PB\Gamma)}{(PA\Gamma)} = 4$.

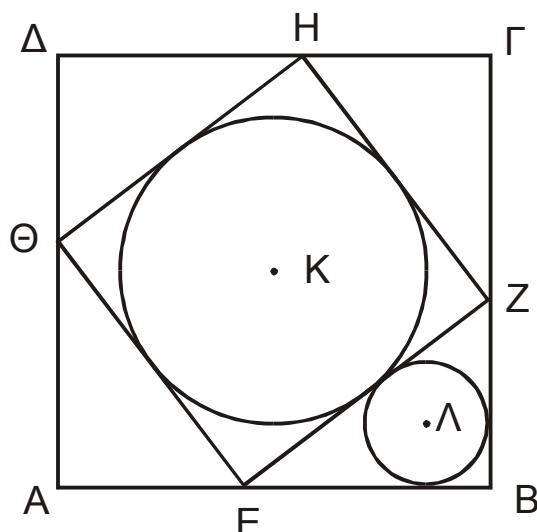
Μονάδες 10

γ. $P\Gamma = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Στο σχήμα που ακολουθεί, σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 7 cm, εγγράφουμε τετράγωνο $EZH\Theta$ έτσι, ώστε:
 $AE = BZ = \Gamma H = \Delta\Theta = 3$ cm.



α. Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου EZHΘ.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου EBZ και να αποδείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου (Λ, ρ) στο τρίγωνο EBZ είναι $\rho = 1\text{cm}$.

Μονάδες 12

γ. Εάν (K, R) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο EZHΘ, να υπολογίσετε το λόγο του εμβαδού του κύκλου (K, R) προς το εμβαδόν του κύκλου (Λ, ρ).

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μιάμιση (1 1/2) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
B' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Να αποδείξετε ότι, αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, τότε το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του ισούται με το γινόμενο της προβολής της στην υποτείνουσα επί την υποτείνουσα.

Μονάδες 6,5

A2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα:

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{\Gamma} > 90^\circ$, $A\Delta$ ύψος και AM διάμεσο.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $AB^2 - A\Gamma^2$	1. $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 + 2B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$
β. AB^2	2. $AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$
γ. $AB^2 + A\Gamma^2$	3. $2B\Gamma \cdot M\Delta$
	4. $A\Gamma^2 + B\Gamma^2 - 2B\Gamma \cdot \Delta\Gamma$
	5. $2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$
	6. $B\Gamma^2$

Μονάδες 6

B1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$\alpha=5$, $\beta=7$, $\gamma=10$. Η διάμεσος μ_γ είναι:

A. $3\sqrt{2}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **Γ.** $2\sqrt{2}$ **Δ.** $4\sqrt{3}$ **Ε.** $4\sqrt{2}$

Μονάδες 4

B2. Δίνεται κύκλος (Ο,Ρ) και μία διάμετρος ΒΓ αυτού. Από σημείο Α του κύκλου φέρνουμε την ΑΔ κάθετη στη ΒΓ.

Αν $B\Gamma=20$ και $B\Delta=\frac{1}{4}\Delta\Gamma$, να δείξετε ότι $AB=4\sqrt{5}$.

Μονάδες 4,5

B3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\Gamma A=\Gamma B=4$ και $\hat{\Gamma}=120^\circ$.

Να δείξετε ότι $AB=4\sqrt{3}$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ. Η προέκτασή της τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ. Αν $\beta^2+\gamma^2=3\alpha^2$, να δείξετε ότι:

α. $AM = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$

Μονάδες 4

β. $M\Delta = \frac{\alpha\sqrt{5}}{10}$

Μονάδες 9

γ. $\frac{E_{AB\Gamma}}{E_{M\Delta\Gamma}} = 10$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο

Σε κύκλο (O, R) θεωρούμε τις διαδοχικές χορδές $AB = R\sqrt{2}$, $B\Gamma = R\sqrt{3}$. Να υπολογίσετε συναρτήσει του R :

- α. το εμβαδόν του κυκλικού τομέα OAG που αντιστοιχεί στην κυρτή γωνία $AO\Gamma$

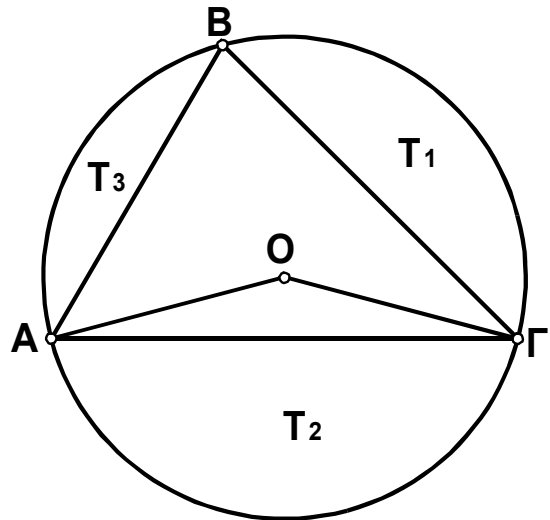
Μονάδες 7

- β. το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων T_1, T_2, T_3

Μονάδες 10

- γ. τη χορδή AG .

Μονάδες 8



ΘΕΜΑ 4ο

Στις πλευρές AB , $B\Gamma$, ΓA τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ , E , Z τέτοια ώστε να είναι:

$$A\Delta = \frac{1}{3} \cdot AB, \quad BE = \lambda \cdot B\Gamma, \quad \Gamma Z = \lambda \cdot \Gamma A, \quad \text{όπου } 0 < \lambda < 1$$

Να δείξετε ότι:

α. $\frac{E_{A\Delta Z}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{1-\lambda}{3}$

Μονάδες 7

β. $\frac{E_{\Delta EZ}}{E_{AB\Gamma}} = \frac{3\lambda^2 - 4\lambda + 2}{3}$

Μονάδες 10

- γ. αν $\lambda = \frac{2}{3}$, το τρίγωνο ΔEZ έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα.

Μονάδες 6,5

A2. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β**, έτσι ώστε να προκύπτει ισότητα.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AD το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. AB^2	1. $AB^2 + B\Gamma^2$
β. $A\Gamma^2$	2. $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$
γ. $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$	3. $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$
	4. $B\Gamma \cdot B\Delta$
	5. $B\Gamma^2 - AB^2$
	6. $AB \cdot B\Gamma$

Μονάδες 6

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **B1** και **B2**.

Δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ύψος AD , για το οποίο έχουμε $BD=1$ και $B\Gamma=3$.

B1. Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AD είναι:

- α. 2 β. $\sqrt{3}$ γ. $\sqrt{2}$ δ. $3\sqrt{2}$
Μονάδες 6,5

B2. Το μήκος της πλευράς AB είναι:

- α. $\sqrt{3}$ β. 3 γ. $\sqrt{2}$ δ. $\sqrt{5}$
Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου $AB\Gamma$ είναι $AB=6$, $B\Gamma=12$ και $\Gamma A=8$.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.
Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM .
Μονάδες 9

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου AM στην πλευρά $B\Gamma$.
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $\hat{xOy}$, $\hat{yOz}$, $\hat{zOx}$ έτσι

ώστε $\hat{xOy} = \hat{yOz} = 150^\circ$. Στις ημιευθείες Ox , Oy , Oz παίρνουμε τα σημεία A , B , Γ αντίστοιχα έτσι ώστε $OA=2$, $OB=4$ και $O\Gamma=6$.

α. Να υπολογίσετε το εμβαδό $E_{O\Gamma A}$ του τριγώνου $O\Gamma A$.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}}$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ημικύκλιο κέντρου O και διαμέτρου $AB=2R$. Στην προέκταση του AB προς το B , θεωρούμε ένα σημείο Γ , τέτοιο ώστε $B\Gamma=2R$. Από το Γ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓE του ημικυκλίου. Η εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο A τέμνει την προέκταση του τμήματος ΓE στο σημείο Δ .

α. Να αποδείξετε ότι $\Gamma E = 2\sqrt{2} R$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $\Gamma A \cdot \Gamma O = \Gamma \Delta \cdot \Gamma E$.

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το τμήμα $\Gamma \Delta$ συναρτήσει του R .

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών των μικτόγραμμων τριγώνων $B\Gamma E$ και $A\Delta E$ συναρτήσει του R .

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο. Τα σχήματα που θα χρησιμοποιήσετε στο τετράδιο μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα, τα οποία και θα καταστραφούν μετά το πέρας της εξέτασης.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ - ΚΛΑΔΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ με ύψος ΑΔ, να αποδείξετε ότι το τετράγωνο μιας πλευράς, η οποία βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δυο άλλων πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο του γινομένου της μιας από τις πλευρές αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτήν, δηλαδή:

$$AB^2 = AG^2 + BG^2 - 2BG \cdot \Delta\Gamma$$

Μονάδες 8

A2. Να συμπληρώσετε το κατάλληλο σύμβολο (= , < , >) στις παρακάτω προτάσεις:

α. Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνον αν $\hat{A} \dots 90^\circ$

β. Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνον αν $\hat{A} \dots 90^\circ$

γ. Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνον αν $\hat{A} \dots 90^\circ$

Μονάδες 4,5

B1. Να γράψετε στο τετράδιο σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται: AB = 3, BΓ=5 και ΑΓ=7.

Η προβολή της AB πάνω στην ΑΓ είναι:

$$A: 7 \quad B: 8,3 \quad \Gamma: \frac{65}{14} \quad \Delta: \sqrt{3} - 1 \quad E: \frac{33}{14}$$

Μονάδες 6,5

B2. Στη **Στήλη Α** δίνεται το είδος της γωνίας ενός τριγώνου και στη **Στήλη Β** τριάδα αριθμών που μπορεί να είναι μήκη πλευρών τριγώνου. Να γράψετε τα γράμματα της **Στήλης Α** και δίπλα τον αριθμό της **Στήλης Β**, που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α

α. $A > 90^\circ$

β. $A < 90^\circ$

γ. $A = 90^\circ$

Στήλη Β

1. $\alpha = 5\kappa, \beta = 4\kappa, \gamma = 3\kappa$
όπου κ θετικός ακέραιος

2. $\alpha = 7, \beta = 4, \gamma = 5$

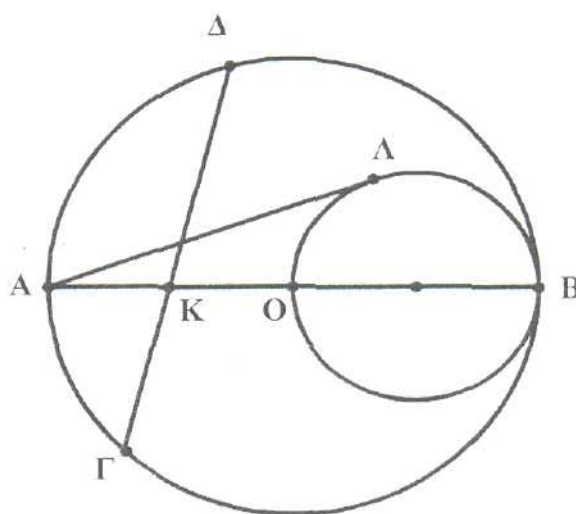
3. $\alpha = 4, \beta = 7, \gamma = 9$

4. $\alpha = 6, \beta = 8, \gamma = 15$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα δίνονται κύκλος κέντρου O με διάμετρο $AB = 8$, K το μέσο της AO και $\Gamma\Delta$ η χορδή που διέρχεται από το K με $K\Gamma = 3$.

α. Να υπολογίσετε το $K\Delta$.

Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε το εφαπτόμενο τμήμα $A\Lambda$ του κύκλου που γράφεται με διάμετρο την OB .

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της πλευράς AB . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του B

κατά ευθύγραμμο τμήμα $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ και φέρουμε την

α. Να αποδείξετε ότι $(\Delta EB) = \frac{1}{2} (\Lambda \Delta B)$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τους λόγους $\frac{(\Delta EB)}{(\Lambda B\Gamma)}$ και $\frac{(\Lambda B\Gamma)}{(\Lambda \Delta \Gamma)}$

Μονάδες 10

γ. Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι $(B\Delta E) = (\Lambda ME)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Τρεις κύκλοι (O_1, R_1) , (O_2, R_2) και (O_3, R_3) εφάπτονται ανά δυο εξωτερικά στα σημεία A , B και Γ .

Αν $R_1 = R_2 = \sqrt{2}$ και $R_3 = 2 - \sqrt{2}$

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $O_1O_2O_3$ είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε την περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου $AB\Gamma$.

Μονάδες 10

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ : ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1ο

A1. Σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ με διάμεσο AM να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς, δηλαδή

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$$

Μονάδες 10

A2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ να συμπληρώσετε τη σχέση

$$A\Gamma^2 - AB^2 = \Lambda \Lambda \Lambda$$

ώστε να εκφράζει το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων.

Μονάδες 2,5

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα **B1** και **B2**.

B1. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται: $\beta=8$, $\gamma=6$ και $\mu_\alpha=5$. Η πλευρά α είναι ίση με:

A. 7 B. 4 Γ. 10 Δ. 9 E. 11

Μονάδες 6,5

B2. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $\alpha=4$, $\beta=7$, $\gamma=5$, AD το ύψος και AM η διάμεσος. Η προβολή DM της διαμέσου AM πάνω στη πλευρά α είναι ίση με:

A. 4 B. 8 Γ. $8/3$ Δ. 5 Ε. 3

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB < \Gamma\Delta$, $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB=4$, $A\Delta=3$, $B\Gamma=5$.

Να υπολογίσετε:

α) την προβολή της $B\Gamma$ πάνω στην $\Delta\Gamma$

Μονάδες 9

β) το εμβαδόν του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$

Μονάδες 9

γ) το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta B\Gamma$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Σε κύκλο (O,R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά $AB=15$.

Να υπολογίσετε:

α) την ακτίνα R του κύκλου

Μονάδες 6

β) το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O,R)

Μονάδες 6

γ) το εμβαδόν του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 6

δ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται κύκλος (O,R) και μια διάμετρος του ΑΒ. Από ένα σημείο Μ του κύκλου, διαφορετικό των Α και Β, φέρουμε κάθετη στη διάμετρο ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ και τη διάμετρο στο σημείο Δ. Επί της ΑΒ θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΓ=ΟΔ και φέρουμε τη ΜΓ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΔ^2 = ΑΔ \cdot ΔΒ$

Μονάδες 6

β) $ΜΓ \cdot ΓΕ = ΜΔ \cdot ΔΖ = R^2 - ΟΔ^2$.

Μονάδες 6

γ) $ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = 2(R^2 + ΟΔ^2)$

Μονάδες 5

δ) $\frac{ΜΓ}{ΓΕ} + \frac{ΜΔ}{ΔΖ} = 2 \frac{R^2 + ΟΔ^2}{R^2 - ΟΔ^2}$

Μονάδες 8

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 1999
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

A. α) Πώς εγγράφουμε τετράγωνο σε κύκλο (O,R);

(Μονάδες 4,5)

β) Να αποδείξετε ότι για την πλευρά λ_4 και το απόστημα α_4 ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) ισχύουν οι τύποι :

$$\lambda_4 = R\sqrt{2}, \quad \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

(Μονάδες 8)

B. α) Τετράγωνο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έχει πλευρά λ_4 , απόστημα α_4 , περίμετρο P_4 και εμβαδόν E_4 . Αν $\lambda_4 = 6\sqrt{2}$ τότε να γράψετε στο τετράδιο σας τα μεγέθη της στήλης Α και δίπλα την αντίστοιχη σωστή τιμή από τη στήλη Β.

Στήλη Α

Στήλη Β

	$3\sqrt{2}$
R	$24\sqrt{2}$
α_4	24
P_4	6
E_4	$12\sqrt{2}$
	72

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι 32, τότε η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι :

A. $4\sqrt{2}$, B. 8, Γ. 4, Δ. $8\sqrt{2}$

(Μονάδες 2,5)

ΘΕΜΑ 2ο

Αν σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε $\alpha=5$, $\beta=4$ και $\gamma=2$, τότε:

α) Η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ του τριγώνου είναι :

A. ορθή,

B. αμβλεία,

Γ. οξεία

(Μονάδες 3)

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

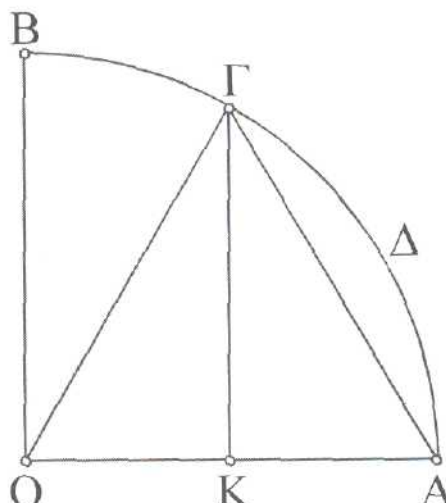
(Μονάδες 7)

β) Υπολογίστε τη διάμεσο μ_a του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 3ο

Η επίκεντρη γωνία $\widehat{A\hat{O}B}$ του κυκλικού τομέα του διπλανού σχήματος είναι ορθή και η ακτίνα του είναι 6. Η κάθετη ευθεία στο μέσον K της ακτίνας OA τέμνει το τόξο του κυκλικού τομέα στο σημείο Γ .



α) Να δείξετε ότι η γωνία $\widehat{A\hat{O}\Gamma}$ είναι 60° .

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $A\Gamma$.

(Μονάδες 6)

γ) Ο λόγος του μήκους του τόξου $A\Gamma$ προς το μήκος του τόξου ΓB είναι :

A. 3,

B. $\frac{1}{2}$,

Γ. 2,

Δ. $\frac{1}{3}$

(Μονάδες 5)

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος $A\Delta\Gamma A$.

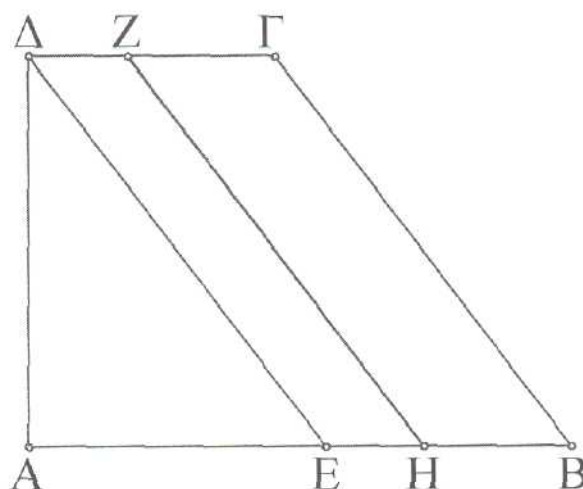
(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4ο

Το οικόπεδο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος έχει την πλευρά AB ίση με 55m, την πλευρά $\Gamma\Delta$ ίση με 25m, την πλευρά $A\Delta$ ίση με 40m και τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ ορθές.

Πρέπει να χαραχθεί ένας δρόμος ΔEHZ , με $\Delta E \parallel \Gamma B$ και $ZH \parallel \Gamma B$, ο οποίος θα χωρίσει το οικόπεδο σε δύο τεμάχια $A\epsilon\Delta$ και $ZHB\Gamma$, όπως στο σχήμα.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν του οικοπέδου $AB\Gamma\Delta$.



(Μονάδες 3)

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τεμαχίου $A\epsilon\Delta$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρεθεί το ΔZ έτσι, ώστε το τεμάχιο $ZHB\Gamma$ να έχει το ίδιο εμβαδόν με το τεμάχιο $A\epsilon\Delta$.

(Μονάδες 8)

δ) Ποιο είναι το πλάτος του δρόμου ΔEHZ στην περίπτωση γ ;

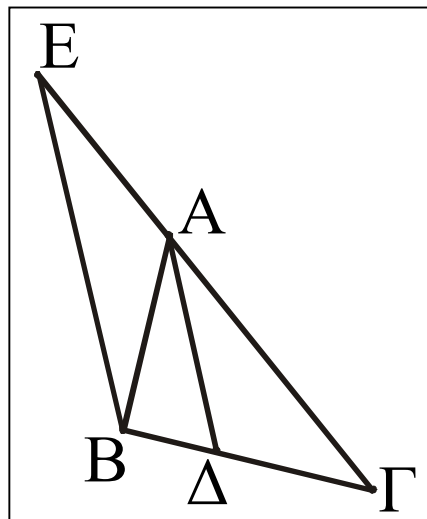
(Μονάδες 8)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 19 ΙΟΥΝΙΟΥ 1999
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ :
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ 1ο (Θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου)

- A.** Έστω AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ ενός τριγώνου $AB\Gamma$. Από το B φέρνουμε την παράλληλη προς την AD και έστω E το σημείο τομής της με την ευθεία AG .



- α) Να εφαρμόσετε το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓBE , για τις παράλληλες ευθείες AD και BE .

Μονάδες 5

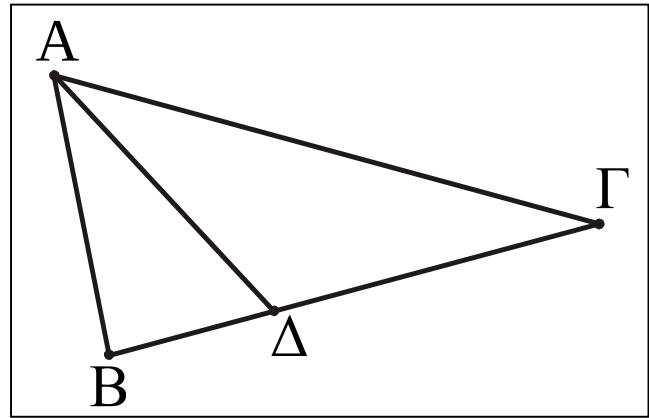
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.

Μονάδες 4

- γ) Να αποδείξετε ότι $\frac{AB}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$.

Μονάδες 3,5

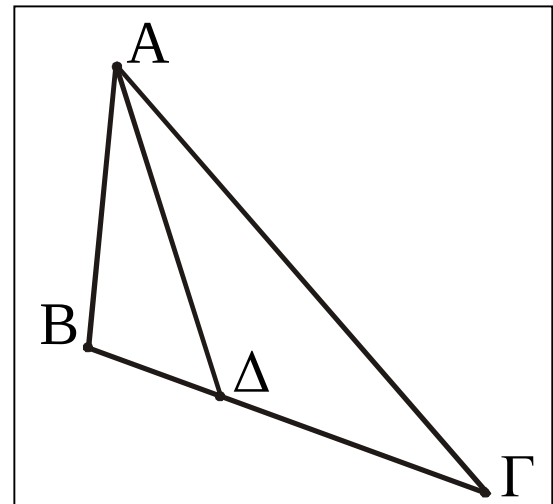
- B.α)** Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.
 Αν $B\Delta = 3$, $\Delta\Gamma = 6$ και $A\Gamma = 10$, τότε η πλευρά AB είναι ίση με:



A. 3, B. 6, Γ. 4, Δ. 5, Ε. 7.

Μονάδες 6,5

- β)** Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$ η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Αν $AB = 4$, $B\Gamma = 6$ και $A\Gamma = 8$, τότε:

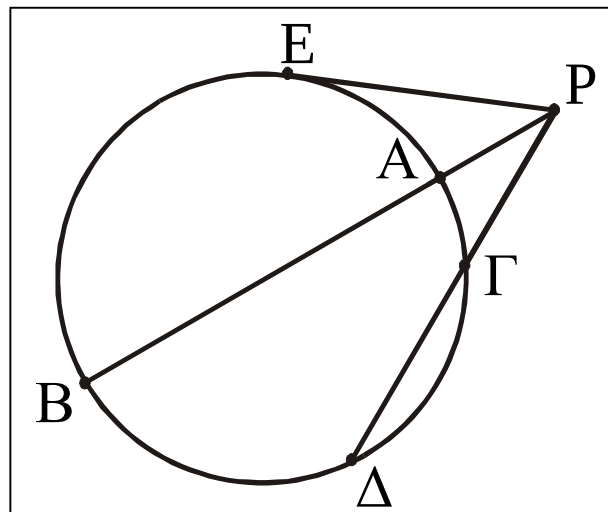


- A. $\Delta B = 1$ και $\Delta\Gamma = 5$
 B. $\Delta B = 5$ και $\Delta\Gamma = 1$
 Γ. $\Delta B = 3$ και $\Delta\Gamma = 3$
 Δ. $\Delta B = 2$ και $\Delta\Gamma = 4$
 Ε. $\Delta B = 4$ και $\Delta\Gamma = 2$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Στο διπλανό σχήμα το τμήμα PE είναι εφαπτόμενο του κύκλου και οι PB και PD τέμνουσες αυτού. Αν $AB = 9$, $PG = 4$ και $GD = 5$, τότε:



α) Να υπολογίσετε το PA

Μονάδες 15

β) Το PE είναι ίσο με:

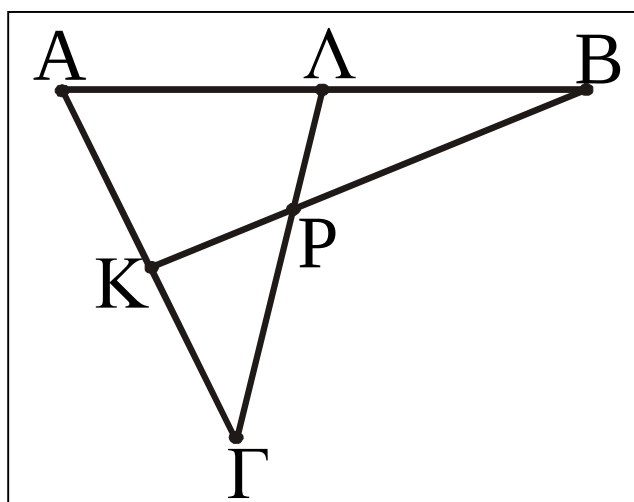
A. 9, B. 5, Γ. 4, Δ. 3, Ε. 6.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στο διπλανό σχήμα τα σημεία K και Λ είναι μέσα των τμημάτων AG και AB αντιστοίχως.

Να δείξετε ότι:



α) Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων AKB και $A\Lambda G$ είναι ίσος με 1.

Μονάδες 15

- β) Αν P είναι το σημείο τομής των $\Lambda\Gamma$ και KB , τότε τα τρίγωνα $B\Lambda P$ και $K\Gamma P$ έχουν ίσα εμβαδά.
Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

- α) Ένας τετραγωνικός κήπος έχει πλευρά $40\sqrt{2}$ μέτρα. Στις τέσσερις κορυφές των γωνιών του κήπου τοποθετούνται περιστρεφόμενοι μηχανισμοί ποτίσματος που έχουν τη δυνατότητα να ποτίζουν κυκλικές περιοχές (κυκλικούς δίσκους) ακτίνας 25 μέτρων. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που δεν ποτίζεται, όταν λειτουργούν και οι τέσσερις μηχανισμοί ταυτόχρονα.

Μονάδες 8

- β) Ένας πέμπτος μηχανισμός, που τοποθετείται στο κέντρο του κήπου και ποτίζει μία κυκλική περιοχή αυτού, λειτουργεί ταυτόχρονα με τους άλλους τέσσερις. Ποια είναι η ακτίνα της μεγαλύτερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου να μην ποτίζεται από δύο ή περισσότερους μηχανισμούς;

Μονάδες 5

- γ) Πόσο είναι το εμβαδόν του κήπου που παραμένει απότιστο στην περίπτωση β);

Μονάδες 5

- δ) Ποια είναι η ακτίνα της μικρότερης κυκλικής περιοχής που πρέπει να ποτίζει ο κεντρικός μηχανισμός έτσι, ώστε καμιά περιοχή του κήπου

να μη μένει απότιστη, όταν λειτουργούν και οι πέντε μηχανισμοί ταυτόχρονα;

Μονάδες 7

Σημείωση : Για τις ερωτήσεις **1.B.α)**, **1.B.β)** και **2.β)** να γράψετε τον αριθμό της κάθε ερώτησης στο τετράδιό σας και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.