Θέμα 12628

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x - 1$ και $g(x) = 3 - x$ των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β, Γ, Ζ.

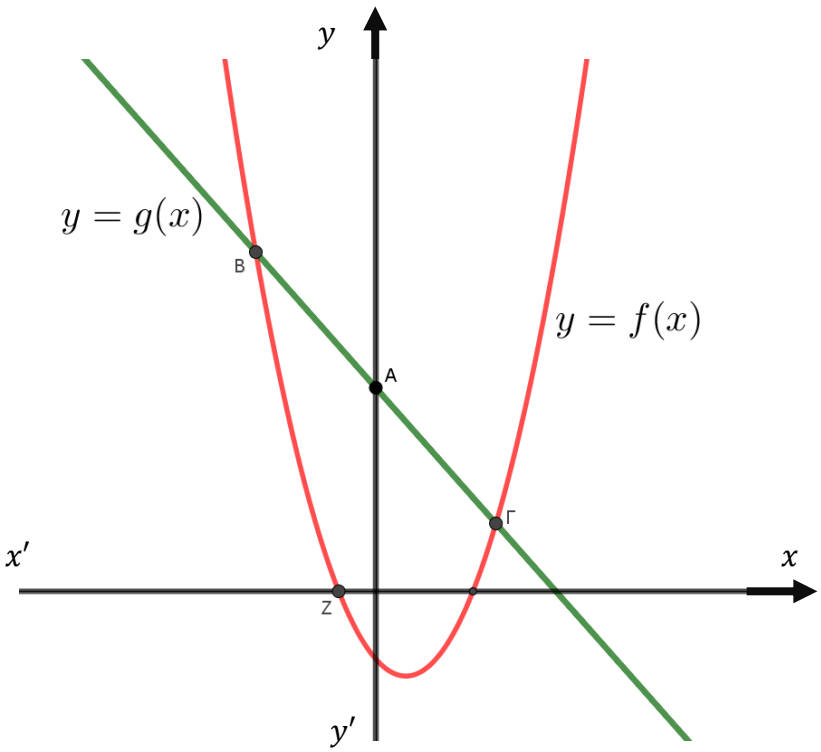
(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της $y = f(x)$ που βρίσκονται πάνω από την γραφική παράσταση της $y = g(x)$

(Μονάδες 6)

γ) Αποδείξτε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό α, η απόσταση των αριθμών $f(\alpha)$ και $-g(\alpha)$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι τουλάχιστον 1.

(Μονάδες 9)



Θέμα 12630

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, η οποία έχει κλίση -2 και διέρχεται από το σημείο (1, 1).

α) Να βρείτε τις τιμές των α και β.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 8)

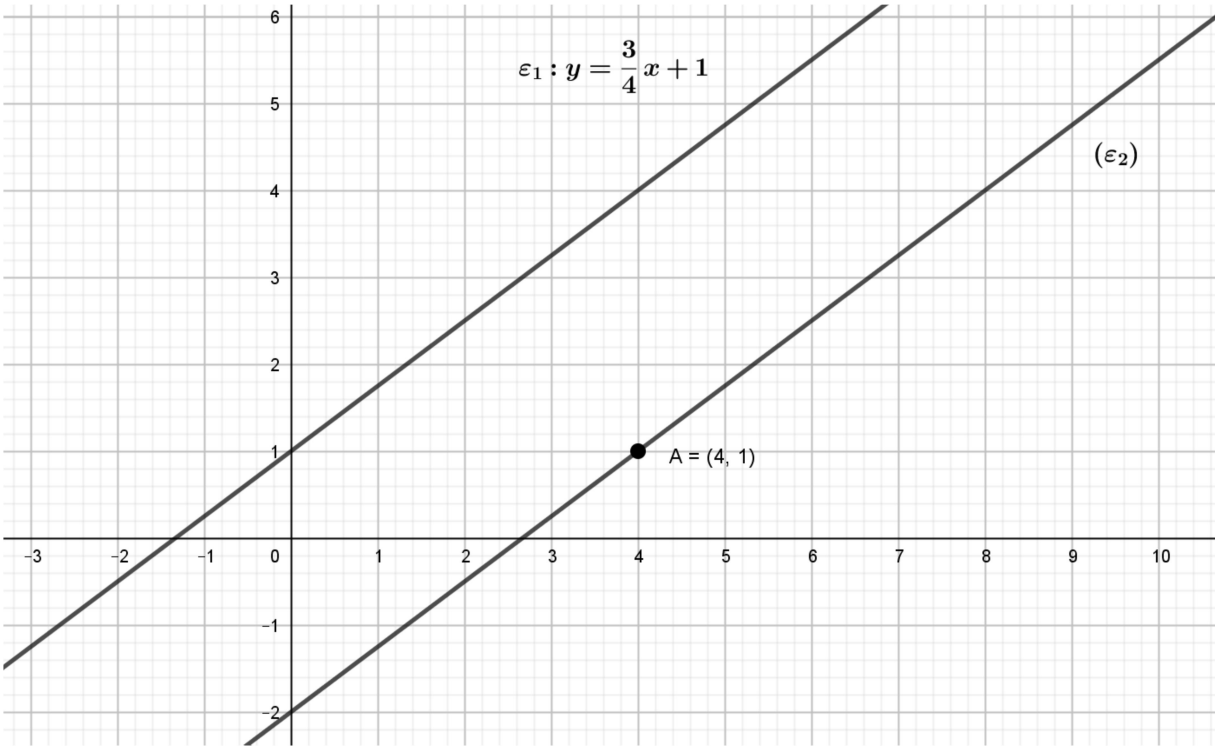
γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

(Μονάδες 9)

Θέμα 12631

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την (ε_1) με εξίσωση $y=\frac{3}{4}x+1$ και την (ε_2) που διέρχεται από το σημείο Α (4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1).



α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2). (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας (ε_2) με τους άξονες. (Μονάδες 9)

Θέμα 12673

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0<\alpha<\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta}<\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3+\frac{3}{\beta}<\beta^3+\frac{3}{\alpha}$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 12680

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Μ(4,3) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν το σημείο Ν(-1,-2) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

Θέμα 12681

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x-3|+4-(|6-2x|+2)$ με $x\in\mathbb{R}$.

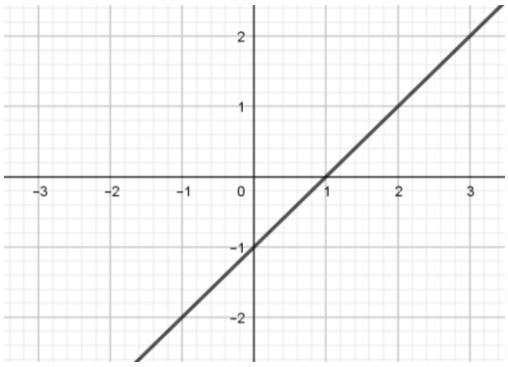
α) Να δείξετε ότι $f(x)=2-|x-3|$.

(Μονάδες 5)

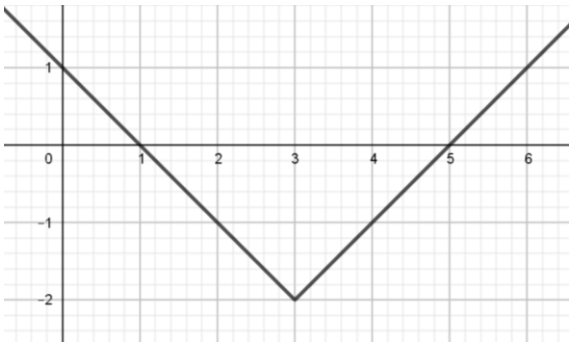
β) Αφού δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}x-1, \alpha\nu\ x<3\\5-x, \alpha\nu\ x\geq 3\end{cases}$, να επιλέξετε το σωστό και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Η γραφική παράσταση της f είναι:

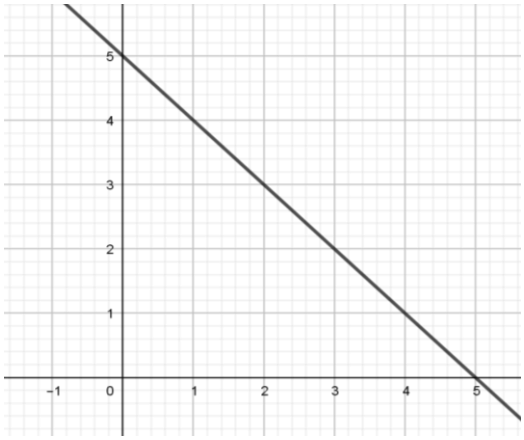
1)



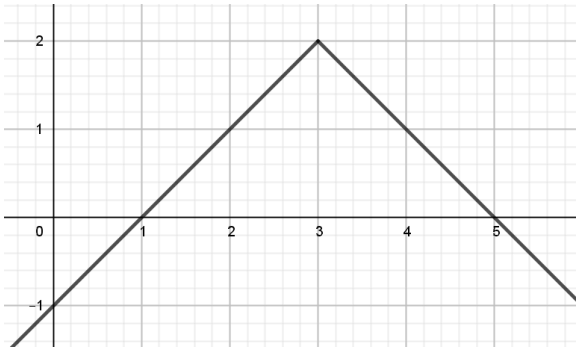
2)



3)



4)



(Μονάδες 9)

γ)

i. Στο σχήμα με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f να σχεδιάσετε την ευθεία $y=-1$ και με τη βοήθειά της να λύσετε την ανίσωση $2-|x-3|>-1$

(Μονάδες 5)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο προηγούμενο ερώτημα.

(Μονάδες 6)

Θέμα 12682

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - (x-1)^2 \kappa\alpha\iota\ g(x) = |x-1| + 2,\ \mu\varepsilon\ x \in R$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $g(x) = \begin{cases} x+1, x \geq 1 \\ -x+3, x < 1 \end{cases}$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση C_g

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 7)

Θέμα 12683

ΘΕΜΑ 4

Μια δεξαμενή έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της.

α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο $16m^3$, να βρείτε τις διαστάσεις της.

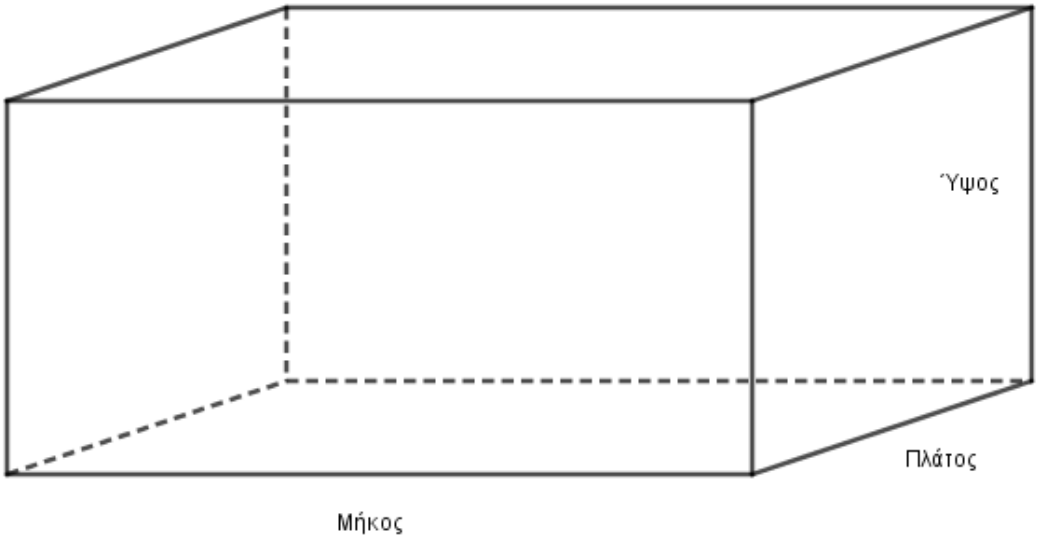
(Μονάδες 8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα (όπως στο παρακάτω σχήμα). Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει $16m^3$.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει $10m^3$ πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή.

(Μονάδες 8)



Θέμα 12684

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία (ε_1) έχει εξίσωση $y=-\frac{1}{2}x-2$ και μια ευθεία (ε_2) διέρχεται από το σημείο Α (-4, 1) και είναι παράλληλη στην (ε_1).

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας (ε_1) και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία (ε_2) με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2). Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες; (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=2$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 12686

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2,4)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράσταση της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

Θέμα 12689

ΘΕΜΑ 4

Ένα ελικόπτερο απογειώνεται από το ελικοδρόμιο και το ύψος του $Y_1(t)$, σε μέτρα, από την επιφάνεια της θάλασσας τα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_1(t) = 150 + 50t, \quad t \in [0, 5].$$

Τα επόμενα πέντε λεπτά κινείται σε σταθερό ύψος και στη συνέχεια κατεβαίνει αργά για δέκα λεπτά ακόμα, μέχρι να επιστρέψει στο ελικοδρόμιο. Το ύψος του από την επιφάνεια της θάλασσας τα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του δίνεται από τη συνάρτηση:

$$Y_2(t) = 650 - 25t.$$

α) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας βρίσκεται το ελικοδρόμιο;

(Μονάδες 6)

β) Σε ποιο ύψος από την επιφάνεια της θάλασσας πετάει το ελικόπτερο από το 5^o μέχρι το 10^o λεπτό της κίνησής του; (Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $Y_2(t)$, και να προσδιορίσετε τις χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η απόσταση του ελικοπτέρου από τη θάλασσα είναι 250 μέτρα.

(Μονάδες 6)

δ)

i. Στα πρώτα 5 λεπτά της κίνησής του, πόσα μέτρα ανεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

ii. Στα τελευταία δέκα λεπτά της κίνησής του πόσα μέτρα κατεβαίνει το ελικόπτερο κάθε λεπτό που περνάει; (Μονάδες 4)

Θέμα 12694

ΘΕΜΑ 4

Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 3 + 4)

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι.

(Μονάδες 6)

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι;

(Μονάδες 6)

Θέμα 12722

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$

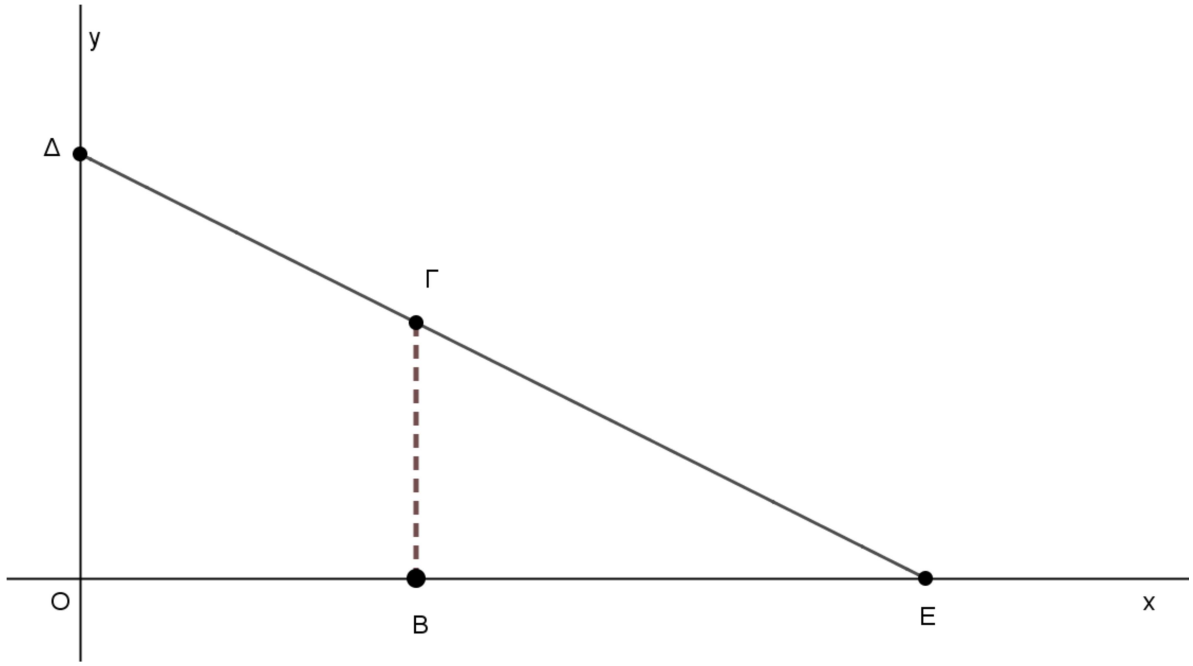
α)Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$ (Μονάδες 12)

β)Να επιλύσετε την ανίσωση $-2 \cdot f(x) < 0$ (Μονάδες 13)

Θέμα 12728

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων, Δ είναι ένα σημείο στον $y'y$ άξονα, E ένα σημείο του $x'x$ άξονα και O είναι η αρχή των αξόνων.



Η εξίσωση της ευθείας $\Delta\mathrm{E}$ είναι: $y+\frac{1}{2}x=4$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων E και Δ. (Μονάδες 6)

Ένα σημείο Γ(t, $y_Γ$) κινείται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Delta\mathrm{E}$ και B ένα σημείο του x'x άξονα, τέτοιο ώστε $\mathrm{B}\Gamma$ να είναι παράλληλη στον y'y άξονα.

β) Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές η τετμημένη t του σημείου Γ και να δείξετε ότι $y_\Gamma=4-\frac{1}{2}t$. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $E(t)=4t-\frac{1}{4}t^2$ εκφράζει το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΒΓΔ και να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 7)

δ) Αν το εμβαδόν του τραπεζίου ισούται με $9,75$ τετραγωνικές μονάδες, να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Γ. (Μονάδες 6)

Θέμα 12729

ΘΕΜΑ 2

Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή. Η σχέση της απόστασή του από το έδαφος (μέτρα) με το χρόνο (sec), φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

(Μονάδες 6)

β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

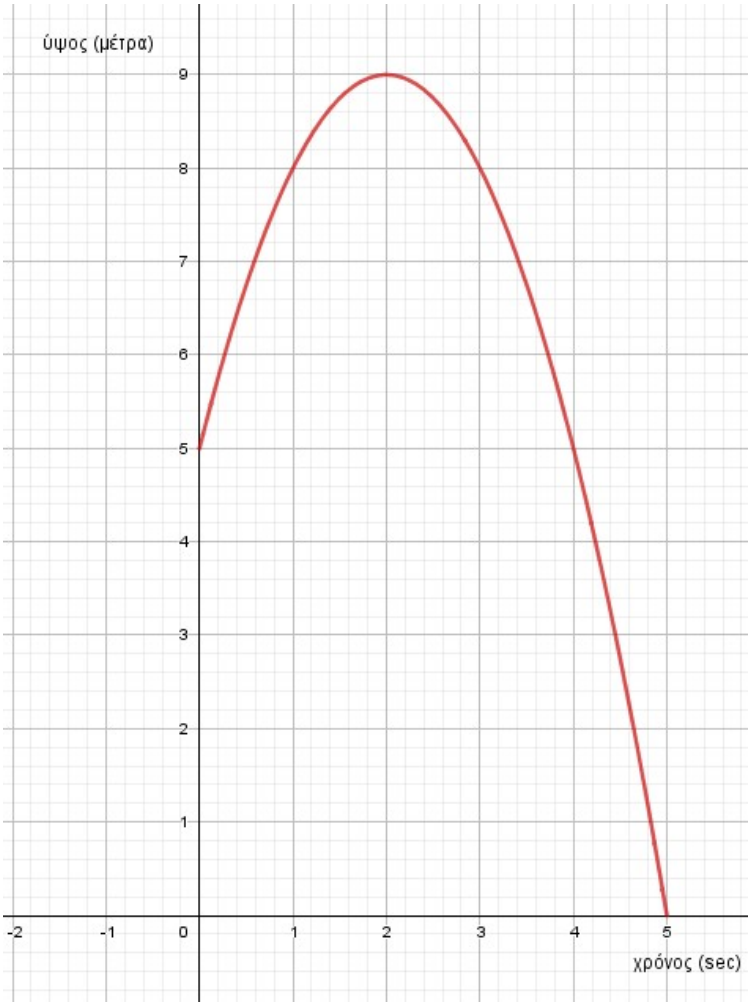
(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το σώμα συναντά το έδαφος.

(Μονάδες 6)



Θέμα 12730

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β, αν η γραφική παράσταση της f σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° και διέρχεται από το σημείο Α(0, 3). Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και κ, αν η ευθεία $y = \lambda x + \kappa$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 3$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη 2.

(Μονάδες 12)

Θέμα 12731

ΘΕΜΑ 4

Έστω πραγματικοί αριθμοί κ, λ ($\kappa \neq 0, \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$). Θεωρούμε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ, $\kappa \cdot \lambda$.

α) Να αποδείξετε ότι οι τρεις αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών είναι πάντα διάφορο του μηδενός.

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι αριθμοί $\frac{\kappa}{\lambda}$, $\kappa \cdot \lambda$,(κ>0, $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$) είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$ να βρείτε τους αριθμούς $\frac{\kappa}{\lambda}$, κ, $\kappa \cdot \lambda$.

(Μονάδες 7)

Θέμα 12763

Θέμα 2

Δίνεται μία πρόοδος α_v με πρώτους όρους $2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \ldots$

α) Να εξετάσετε αν η α_v είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η α_v είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το ν-οστό της όρο.

(Μονάδες 13)

Θέμα 1274

Θέμα 4

Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά.

α) Αν α_ν το πλήθος των καθισμάτων της ν - οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_ν είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα.

(Μονάδες 9)

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα.

(Μονάδες 7)

Θέμα 12765

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{\mathrm{x} - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης f για όποιους από τους αριθμούς $-1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 6,$ είναι αυτό δυνατό.

(Μονάδες 12)

Θέμα 12787

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x - 6 = 0$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον θετικό ακέραιο αριθμό κ ώστε οι αριθμοί $\kappa - 2, \kappa, 2\kappa + 3$ να είναι διαδοχικοί όροι σε μια γεωμετρική πρόοδο.

(Μονάδες 15)

Θέμα 12788

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f\left(\sqrt{3}\right)+f\left(-\sqrt{3}\right)=8$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλα τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, με συντεταγμένες ακέραιους αριθμούς, τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=4$

(Μονάδες 9)

γ) Έστω α,β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\neq\beta$ ώστε να ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$. Να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=2$

(Μονάδες 9)

Θέμα 12834

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ ώστε ΑΒ=2, ΑΔ=4, ΓΔ=6, ενώ η ΑΔ είναι κάθετη στην ΑΒ και επίσης κάθετη στην ΓΔ. Το σημείο Ε μπορεί να πάρει οποιαδήποτε θέση επί του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ και ονομάζουμε x την απόσταση του Ε από την ΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τριγώνου ΑΕΔ δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = -2x + 12$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού αυτής της συνάρτησης;

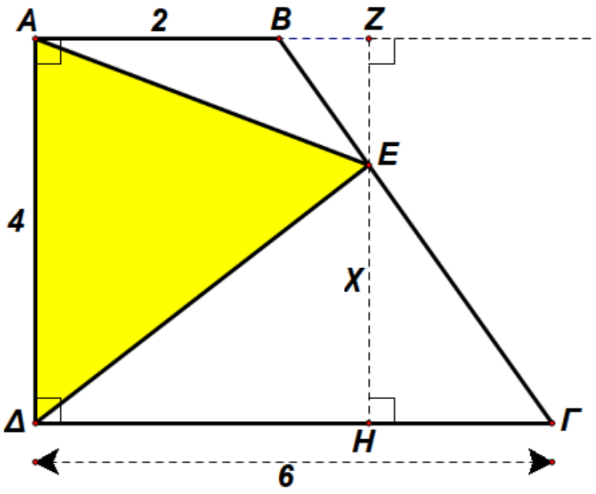
(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = f\left(\frac{1}{16}\right) + f\left(\frac{2}{16}\right) + f\left(\frac{3}{16}\right) + f\left(\frac{4}{16}\right) \ldots + f(\frac{64}{16})$.

(Μονάδες 8)



Θέμα 12856

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ευθεία ε: y=αx+5.Αν η ευθεία δ : y=-3x-6 είναι παράλληλη στην (ε), τότε:

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x΄x;

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία ε τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 12)

Θέμα 12857

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x=2\lambda-2$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α)

i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=-2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε την τιμή του λ, αν γνωρίζετε ότι ο αριθμός $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 10)

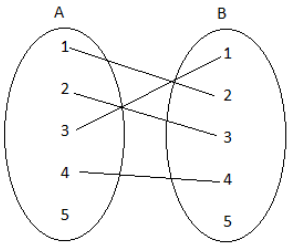
β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

(Μονάδες 8)

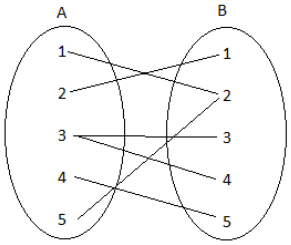
Θέμα 12908

ΘΕΜΑ 2

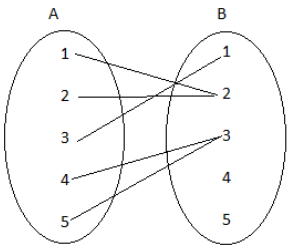
Στα παρακάτω σχήματα δίνονται 3 αντιστοιχίσεις από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β.



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

α) Να αιτιολογήσετε γιατί οι αντιστοιχίσεις των σχημάτων 1 και 2 δεν παριστάνουν συνάρτηση από το Α στο Β ενώ του σχήματος 3 παριστάνει συνάρτηση από το Α στο Β.

(Μονάδες 9)

β) Αν η αντιστοίχιση του σχήματος 3 είναι η συνάρτηση f,

i. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης f.

(Μονάδες 4)

ii. Να παραστήσετε με αναγραφή των στοιχείων του το σύνολο τιμών f(A) της συνάρτησης f.

(Μονάδες 4)

iii. Να βρείτε τις τιμές f(1) και f(2).

(Μονάδες 8)

Θέμα 12909

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x-3|<5$.

α) Να δείξετε ότι $x \in (-2,8)$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x-3|<5$.

(Μονάδες 7)

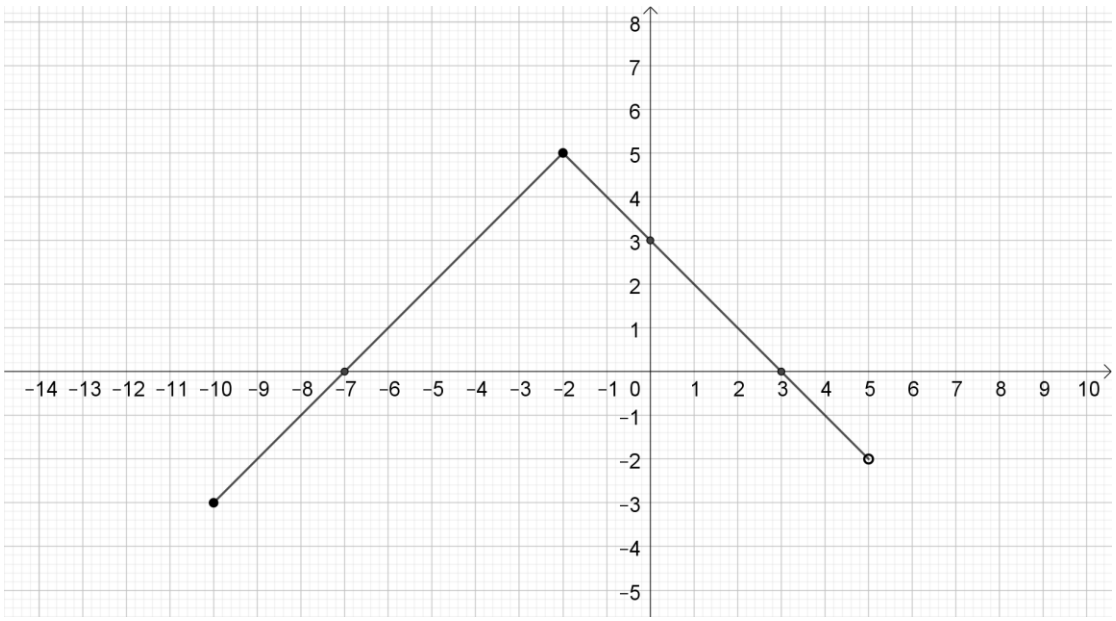
γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $\mathrm{B}=\{-3,-2,-1,0,3,4\}$, να παραστήσετε τα σύνολα $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ και $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ με αναγραφή των στοιχείων τους.

(Μονάδες 9)

Θέμα 12910

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α και το σύνολο τιμών της f(A).

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές f(-2), f(0), f(3).

(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες f(x) = 0.

(Μονάδες 4)

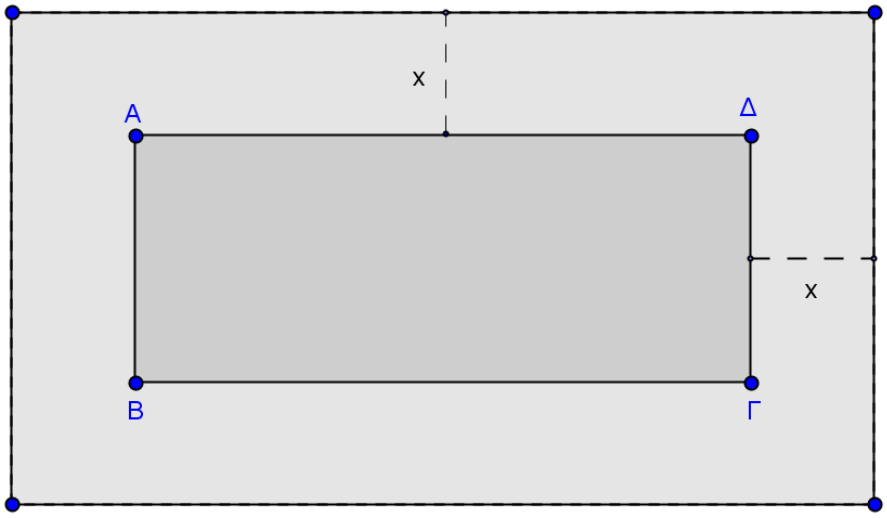
δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες f(x) < 0.

(Μονάδες 7)

Θέμα 12911

ΘΕΜΑ 4

Ένα δημοτικό κολυμβητήριο έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις *15m* και *25m*. Ο δήμος, για λόγους ασφάλειας, θέλει να κατασκευάσει γύρω από το κολυμβητήριο μια πλακοστρωμένη ζώνη με σταθερό πλάτος *x* m *(x > 0),* όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της ζώνης δίνεται από τη σχέση: $E(x)=4x^2+80x$, $x>0$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το πλάτος x της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδό $E=500\,m^2$.

(Μονάδες 7)

γ) Ποιο μπορεί να είναι το πλάτος της ζώνης, αν αυτή έχει εμβαδόν μικρότερο από $500\,m^2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Θέμα 12913

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2+2x-3.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{x-1}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της παραπάνω συνάρτησης f.

(Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=x+3$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

(Μονάδες 4)

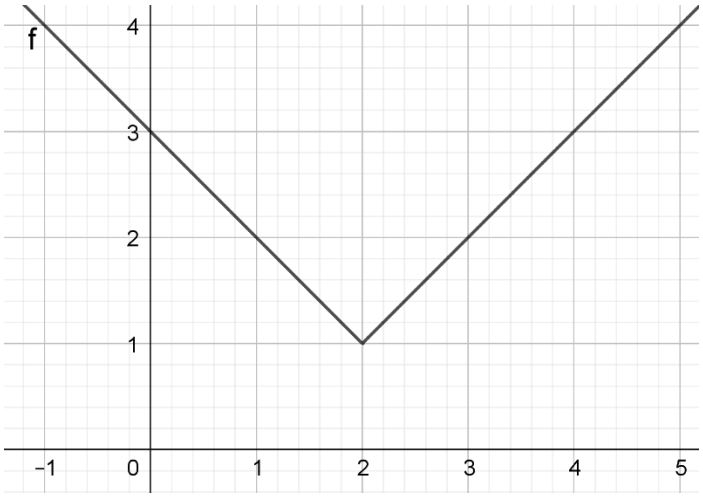
iii. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

(Μονάδες 8)

Θέμα 12914

ΘΕΜΑ 4

Έστω η ευθεία $\varepsilon: y = c$, με παράμετρο $c \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = |x - 2| + 1$, η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



α)

i. Με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ η ευθεία ε και η γραφική παράσταση της f έχουν κοινά σημεία;

(Μονάδες 4)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος α)i).

(Μονάδες 5)

β) Έστω ότι η ευθεία ε έχει με τη γραφική παράσταση της f δυο κοινά σημεία A, B. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι $A(3 - c, c)$ και $B(c + 1, c)$.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Αν A, B τα σημεία του ερωτήματος β), με βάση το σχήμα, για ποιες τιμές του c το μήκος του τμήματος AB είναι $(AB) \leq 2$;

(Μονάδες 4)

ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)i).

(Μονάδες 4)

Θέμα 12921

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2|\kappa|\, x - 2$ και η ευθεία ε: $y = 2x - \kappa^2$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία (ε) τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία για κάθε τιμή της παραμέτρου κ.

(Μονάδες 8)

γ) Για κ = -3 να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας με την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 5)

δ) Αν Α και Β τα σημεία τομής του ερωτήματος γ), να βρείτε την απόσταση (ΑΒ).

(Μονάδες 7)

Θέμα 12922

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \alpha^2 + \beta^2$ και $B = 2\alpha\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 12939

ΘΕΜΑ 2

Έστω η ευθεία ε_1: $y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τον άξονα y'y στο Α (0, -6) και τον άξονα x'x στο σημείο Β(-3, 0).

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ευθεία ε_2 που είναι παράλληλη με την ε_1 και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 6)

Θέμα 12941

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{9-x^2}{3-|x|}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση f .

(Μονάδες 6)

α) Για τις τιμές του x που ορίζεται η συνάρτηση f να δείξετε ότι $f(x)=3+|x|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης C_f με τους άξονες.

(Μονάδες 6)

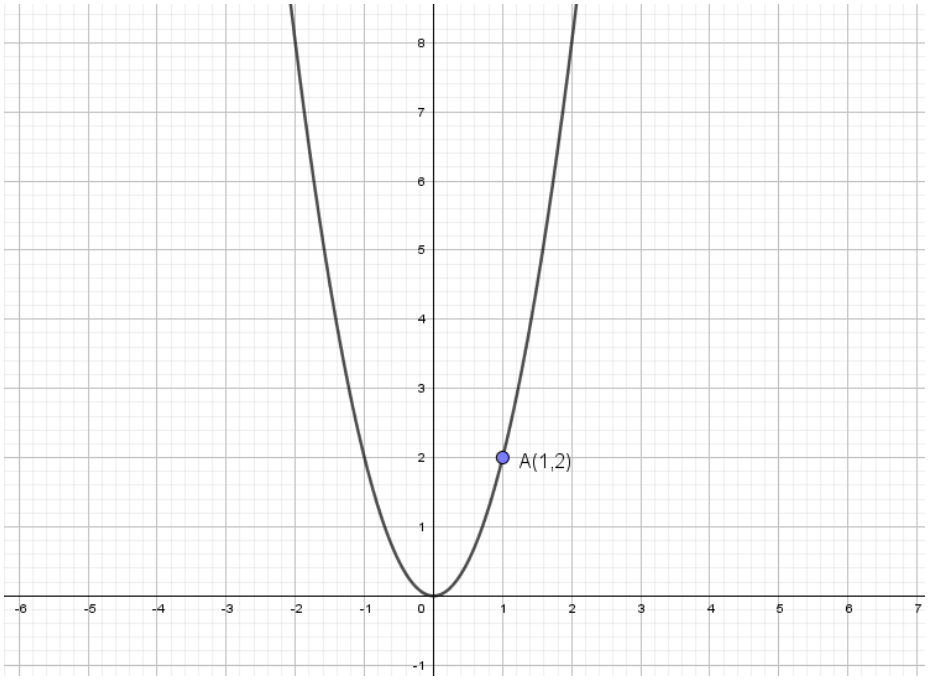
δ) Αν $g(x)=3-x^2$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

Θέμα 12942

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2$, $x\in\mathbb{R}$ με παράμετρο α.



α) Αν το σημείο $A(1,2)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να δείξετε ότι τιμή της παραμέτρου είναι $\alpha=2$.

(Μονάδες 6)

β)

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο $(1,6)$ και έχει κλίση $\lambda=2$.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

(Μονάδες4)

γ)

i. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x)<2x+4$.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση του προηγούμενου ερωτήματος.

(Μονάδες 7)

Θέμα 12943

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{5}\right)$ και $\beta=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$ και το γινόμενο $\alpha\cdot\beta$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=7$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 12944

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x+\frac{1}{x}$ και $g(x)=x-\frac{1}{x}$, $x\neq 0$

α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=f(2)+g(2)-f\left(\frac{1}{2}\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)$$

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(f(x)\right)^2-\left(g(x)\right)^2=4$ για οποιοδήποτε αριθμό x με $x\neq 0$

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε την ευθεία $y=\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Αν η ευθεία έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, να αποδείξετε ότι $|\alpha|\geq 2$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 12945

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ με $\alpha_3 = 8$ και $\alpha_{11} = 32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο.

(Μονάδες 8)

γ) Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της (α_ν) είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν.

(Μονάδες 10)

Θέμα 12976

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 12997

ΘΕΜΑ 2

Έχουμε μπροστά μας τη λίστα με τα ονοματεπώνυμα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ λυκείου ενός Γενικού Λυκείου.

Σχηματίζουμε τα σύνολα Α, με στοιχεία τα μικρά ονόματα μαθητών της Α΄ τάξης ενός Γενικού Λυκείου και Β με στοιχεία τα επώνυμα μαθητών της Α΄ τάξης του ίδιου Γενικού Λυκείου.

Ορίζουμε την αντιστοίχιση $f:A\to B$ σύμφωνα με την οποία αντιστοιχούμε κάθε μικρό όνομα μαθητή στο επώνυμό του και την $g:B\to A$ με την οποία αντιστοιχούμε σε κάθε επώνυμο μαθητή το μικρό του όνομα.

α) Να εξετάσετε αν η αντιστοίχιση $f:A\to B$ ορίζει πάντα συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β.

(Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε υπό ποιες προϋποθέσεις η αντιστοίχιση $g:B\to A$ αποτελεί συνάρτηση από το σύνολο Β στο σύνολο Α και να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη και ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή.

(Μονάδες 15)

Θέμα 12998

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι διαδοχικοί όροι της γεωμετρικής προόδου (α_v) : $\frac{27\sqrt{3}}{2}, \frac{81}{2}, \frac{81\sqrt{3}}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι παραπάνω όροι δεν μπορούν να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii. $\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^7$.

(Μονάδες 5)

β) Αν $a_7 = \frac{27\sqrt{3}}{2}$, να βρεθεί ο ν-οστός όρος της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\lambda = \sqrt{3}$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της γεωμετρικής προόδου (α_v) είναι ίσο με $\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{11} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2}$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 12999

ΘΕΜΑ 4

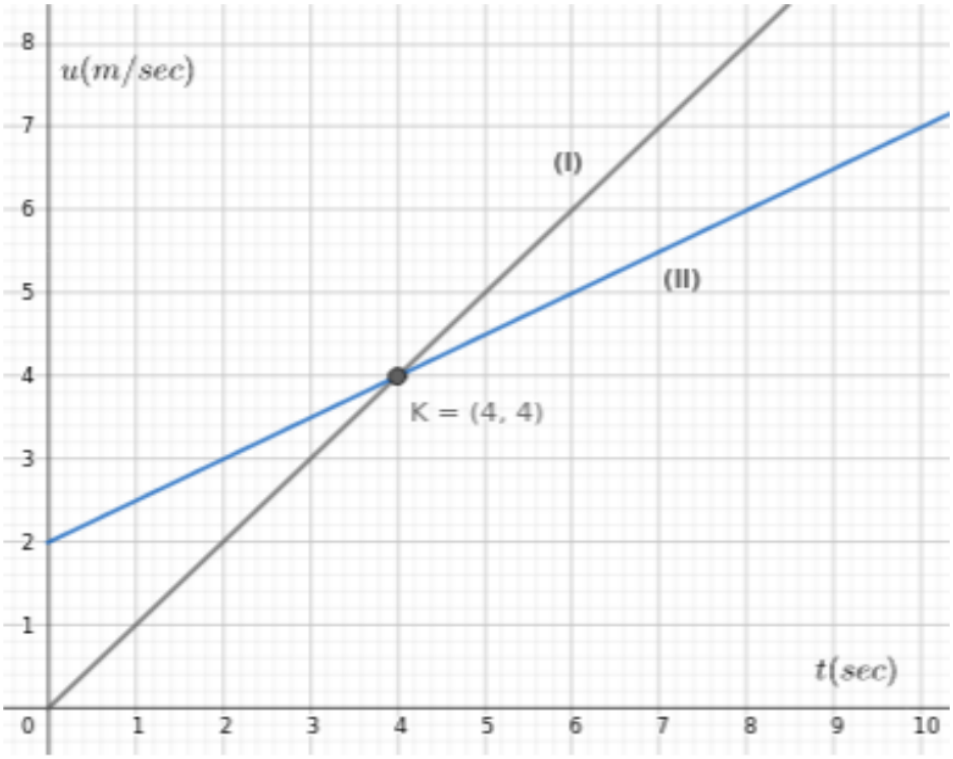
Ένα όχημα, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει ταχύτητα, η οποία δίνεται από τη σχέση $u=u_0+a\cdot t$, όπου u η ταχύτητα του οχήματος τη χρονική στιγμή t και a η σταθερή επιτάχυνσή του στη διάρκεια της κίνησης, ενώ u_0 η αρχική ταχύτητα της κίνησής του.

α) Αν η παραπάνω σχέση αποτελεί συνάρτηση της ταχύτητας του οχήματος ως προς το χρόνο, να προσδιορίσετε ποια είναι η εξαρτημένη, ποια η ανεξάρτητη μεταβλητή και ποιο το ευρύτερο δυνατό πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

(Μονάδες 6)

β) Ένα όχημα Α, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινά από θέση ηρεμίας και τη χρονική στιγμή 4 sec έχει ταχύτητα 4 m/sec, ενώ ένα άλλο όχημα Β, που εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, έχει αρχική ταχύτητα 2m/sec. Οι παρακάτω ευθείες (I),(II) στο διάγραμμα ταχύτητας - χρόνου περιγράφουν τις ταχύτητες των δύο οχημάτων.

i) Ποια από τις δύο ευθείες (I), (II) περιγράφει την ταχύτητα του οχήματος Α και ποια την ταχύτητα του οχήματος Β;



(Μονάδες 6)

Θέμα 13025

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x-1| \leq 23$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 5)

Θέμα 13026

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2, & \alpha\nu \ \ x \ \ \acute{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma \\ 2x, & \alpha\nu \ \ x \ \ \rho\eta\tau\acute{o}\varsigma \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f\left(\sqrt{2}\right)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$

(Μονάδες 10)

β) Αν x ρητός, να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2=4x-1$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 13030

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$ $και$ $g(x) = |x + 3|$.

Να βρείτε:

α) τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 10)

β) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.

(Μονάδες 7)

γ) τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την C_g.

(Μονάδες 8)

Θέμα 13031

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση G, με $G(x)=\dfrac{2x+3}{x-4}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης G για $x=2,\quad x=0,\quad x=-\dfrac{1}{2}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία δεν ορίζεται η συνάρτηση G.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του x που αντιστοιχίζεται, μέσω της G, στο 3.

(Μονάδες 9)

Θέμα 13032

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=1-3x$ και $g(x)=\sqrt{x+5}$.

α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $f(-1)=g(11)$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε $f(x)=g(4)$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 13033

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία (ε): $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε).

(Μονάδες 4)

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον x'x άξονα;

(Μονάδες 4)

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία Α(6, 1), Β(-2, 3) και Γ(8, 0) είναι σημεία της ευθείας (ε).

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο (k, 5) να είναι σημείο της ευθείας (ε).

(Μονάδες 8)

Θέμα 13053

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν $\alpha+\beta+\gamma=0$ και $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta+\gamma=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=-\alpha$.

(Μονάδες 6)

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0.$$

(Μονάδες 13)

Θέμα 13054

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (3\alpha + 4)x - 4$ και $\varepsilon_2 : y = (3 - 4\alpha)x + 4$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν α=1, να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών.

(Μονάδες 6)

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες.

(Μονάδες 13)

Θέμα 13055

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+5, x\in\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2x+\beta, \beta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(2+x)=f(2-x)$.

(Μονάδες 6)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=f(3,52)-f(0,52)+f(3,48)-f(0,48)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση C_f της f έχει κοινά σημεία με την ευθεία, όταν $\beta=-5$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του β, ώστε η C_f να έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία.

(Μονάδες 7)

Θέμα 13056

ΘΕΜΑ 4

Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, ... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί.

.	. . .	. . . . . .	. . . .	...
1	3	6	10	...

Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_\nu = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τον $10^{ο}$ τριγωνικό αριθμό.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου.

(Μονάδες 10)

Θέμα 13088

ΘΕΜΑ 2

Έστω x,y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε: $A = 2(x+y)^2 - (x-y)^2 - 6xy - y^2$

α) Να αποδείξετε ότι : $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

Θέμα 13089

ΘΕΜΑ 4

Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ!

Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α)

i. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

(Μονάδες 4)

ii. Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.

(Μονάδες 5)

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_\nu = \beta_{8-\nu}$ για κάθε $\nu = 1, 2, ..., 7$.

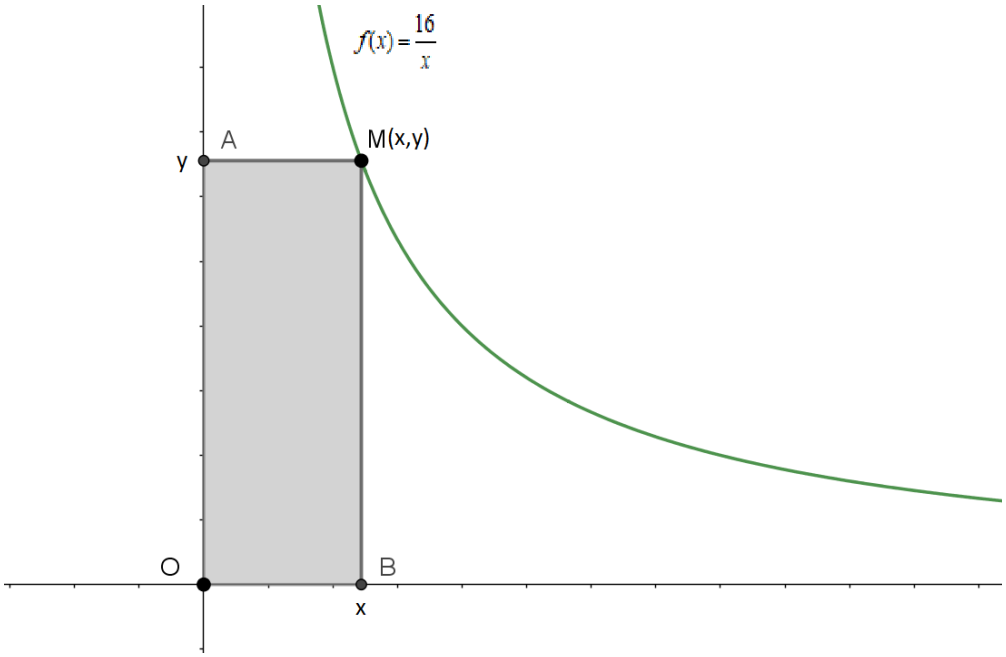
(Μονάδες 5)

Θέμα 13090

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{16}{x}$, $x>0$.

Ένα σημείο Μ(x,y) κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και έστω Α και Β οι προβολές του Μ στους άξονες $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Να δείξετε ότι όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ που προκύπτουν για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ έχουν εμβαδόν 16 τετραγωνικές μονάδες, ενώ η περίμετρός τους δίνεται, σε μονάδες μήκους, από τη συνάρτηση $\Pi(x)=2x+\frac{32}{x}$, $x>0$ όπου x η τετμημένη του Μ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜΒ να έχει περίμετρο 20 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 7)

γ) Αν Μ΄ είναι το σημείο της γραφικής παράστασης της f ώστε το ορθογώνιο ΟΑΜ΄Β να είναι τετράγωνο τότε:

i. Να δείξετε ότι το Μ΄ έχει τετμημένη 4.

(Μονάδες 4)

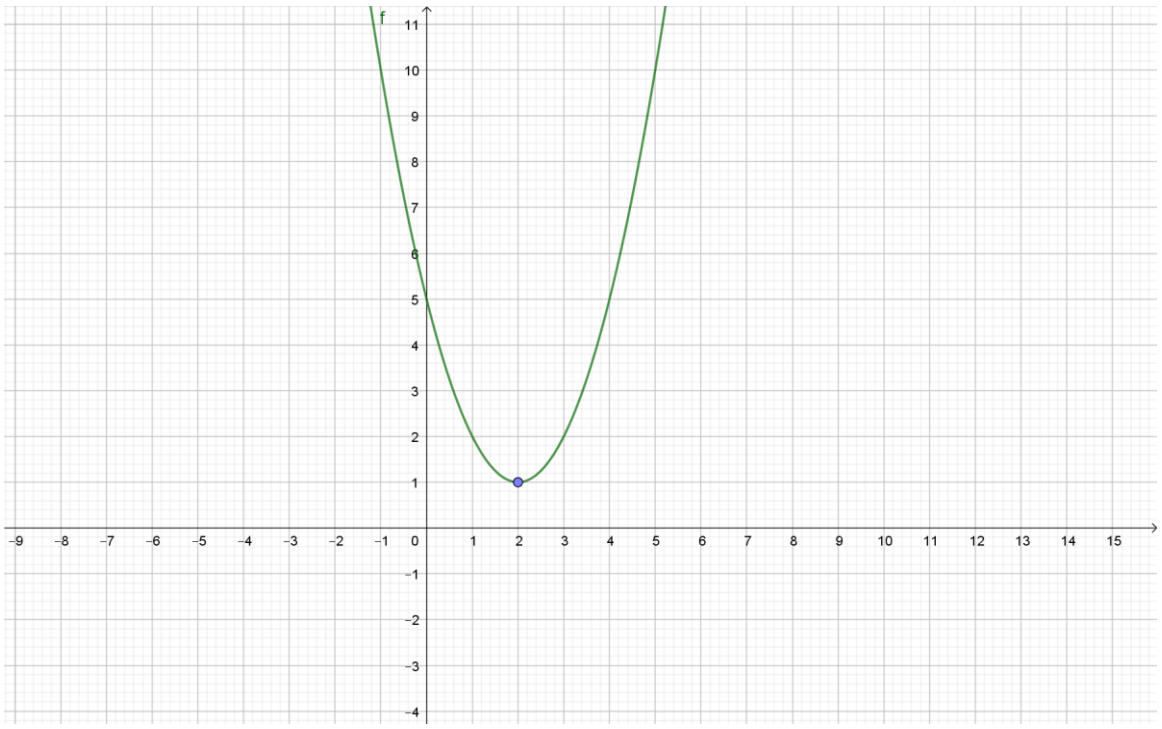
ii. Να δείξετε ότι το τετράγωνο ΟΑΜ΄Β έχει τη μικρότερη περίμετρο από όλα τα ορθογώνια ΟΑΜΒ, δηλαδή ότι $\Pi(x)\geq\Pi(4)$ για κάθε $x>0$.

(Μονάδες 6)

Θέμα 13091

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+5$.



α) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = 7 και στη συνέχεια να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β)

i. Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία y = λ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο β)i.

(Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι μια ευθεία y = λ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε δύο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 4$.

(Μονάδες 6)

Θέμα 13114

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{|x-1|-|3-3x|+|2x-4|}{2}$.

α) Να δείξτε ότι $f(x)=d(x,2)-d(x,1)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x)=0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 13120

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x - 4\lambda^2, \lambda \epsilon \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία για κάθε $\lambda \epsilon \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Για $\lambda \neq 0$ να βρείτε το πρόσημο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \epsilon \mathbb{R}$ ώστε το συμμετρικό του σημείου $A(4,4)$ ως προς τον άξονα $x'x$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες7)

δ) Για $\lambda = -1$ να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

Θέμα 13168

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 2\lambda x + \gamma$ με $x \in \mathbb{R}$ και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο $(0, -1)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\gamma = -1$

(Μονάδες 5)

ii. Η γραφική παράσταση της f δεν είναι κάτω από την ευθεία $y = -\lambda^2 - 1$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

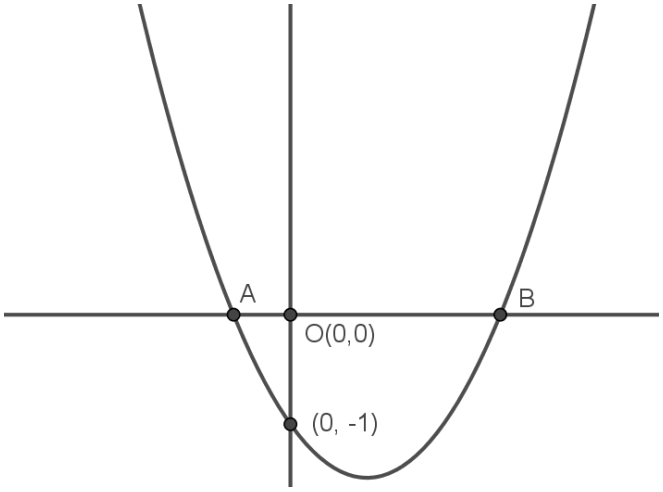
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο σημεία A και B με συντεταγμένες $A\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0\right)$ και $B\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 1}, 0\right)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των A και B είναι μεγαλύτερη ή ίση του 2 για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)



Θέμα 13169

ΘΕΜΑ 2

Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3 \leq x \leq 5$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $x - 5 \leq 0 < x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| - |x - 5| = 2$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 13170

ΘΕΜΑ 4

Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά ε % (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι ε %).

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο ε %, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \cdot \left(1 + \frac{\varepsilon}{100}\right)^2$ €.

(Μονάδες 7)

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης

$$(1{,}03^2 - 1{,}02^2) \cdot y = 15811 - 15000 \cdot 1{,}02^2$$

(Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα.

(Μονάδες 8)

Θέμα 13171

ΘΕΜΑ 4

Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu$, $\nu \in N$ με $\nu \geq 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1} = 2\nu^2 - \nu - 1$, $\nu \geq 2$

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $a_\nu = 4\nu + 1$, $\nu \geq 1$

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 7)

Θέμα 13173

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 10 + 3\nu$.

α)

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_ν) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί;

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401.

(Μονάδες 8)

Θέμα 13174

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι παραστάσεις $\mathrm{A}=\dfrac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}$ και $\mathrm{B}=\dfrac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις Α και Β;

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι Α = $3-|x|$ και Β = $|x|-2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $\mathrm{B}-\mathrm{A}<2d(x,4)-5$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 13176

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x-1|<2$ και $x^2-3x+2\geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in(-1,1]\cup[2,3)$.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1,\rho_2\in(-1,1]$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

(Μονάδες 4)

ii. Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2, με $\rho_1<\rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1\in(-1,1]$ και $\rho_2\in[2,3)$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση;

(Μονάδες 5)

Θέμα 13177

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $2 \le \alpha \le 3$ και $-2 \le \beta \le -1$.

α) Να δείξετε ότι : $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι : $0 \le \alpha + \beta \le 2$.

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1.

(Μονάδες 9)

Θέμα 13178

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το σημείο $M(3,4)$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και από το $O(0,0)$.

(Μονάδες 9)

β) Δίνεται το σημείο $N(-3,\lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, το οποίο ανήκει στην ευθεία OM.

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

ii. Αν $N(-3,-4)$ να εξετάσετε αν τα σημεία M,N είναι συμμετρικά ως προς το O.

(Μονάδες 8)

Θέμα 13179

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \le \beta \le 2$ και $2 \le \alpha \le 4$.

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3.

(Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \le 1 \le \frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta}-1\right|$.

(Μονάδες 6)

Θέμα 13266

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \alpha^2 + 4\alpha + 5$ και $B = (2\beta + 1)^2 - 1$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$.

(Μονάδες 9)

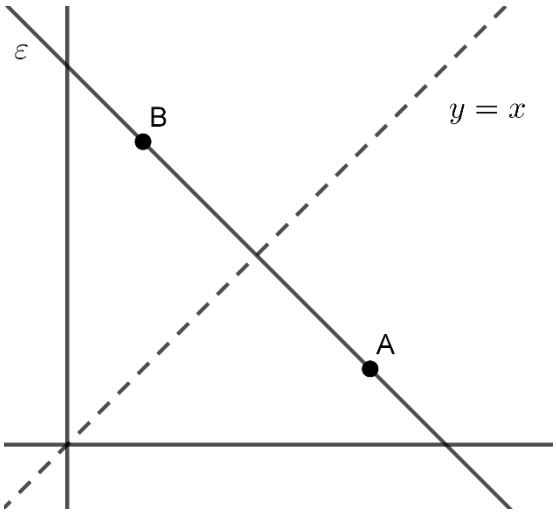
ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$;

(Μονάδες 8)

Θέμα 13298

ΘΕΜΑ 4

Τα σημεία A και B είναι σημεία του 1ου τεταρτημόριου και είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο $y = x$ της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων, όπως φαίνεται στο σχήμα.



α) Αν $A(x_A, y_A)$ και $B(x_B, y_B)$, να γράψετε τη σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες του σημείου A με τις συντεταγμένες το σημείου B.

(Μονάδες 3)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ε που διέρχεται από τα A κα B έχει κλίση $\alpha = -1$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον τα σημεία A και B έχουν συντεταγμένες $(4, \kappa^2 - 3\kappa + 1)$ και $(\kappa - 2{,}4)$ αντίστοιχα, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\kappa = 3$ και να προσδιορίσετε τα σημεία A και B.

(Μονάδες 8)

ii. Για $\kappa = 3$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

(Μονάδες 8)

Θέμα 13312

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-6x+\lambda=0$ (1) όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha\cdot\beta=\lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta\le 9$.

(Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=9$ αν και μόνο αν $\alpha=\beta$.

(Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α, β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο.

(Μονάδες 7)

Θέμα 13313

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^7-x}{x^3-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=x^4+x^2+1$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=3$ έχει λύση στο σύνολο A.

(Μονάδες 7)

Θέμα 13314

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-3$. Αν $\mathrm{A}(\alpha,0)$, $\mathrm{B}(\beta,0)$, $\Gamma(\gamma,\delta)$ σημεία της γραφικής παράστασης της f όπως φαίνεται στο σχήμα και η παράλληλη από το Γ στον $x'x$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f ένα κοινό σημείο, τότε:

α) Να δείξετε ότι $\alpha=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$ και $\beta=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $f(\sqrt{2})<0$.

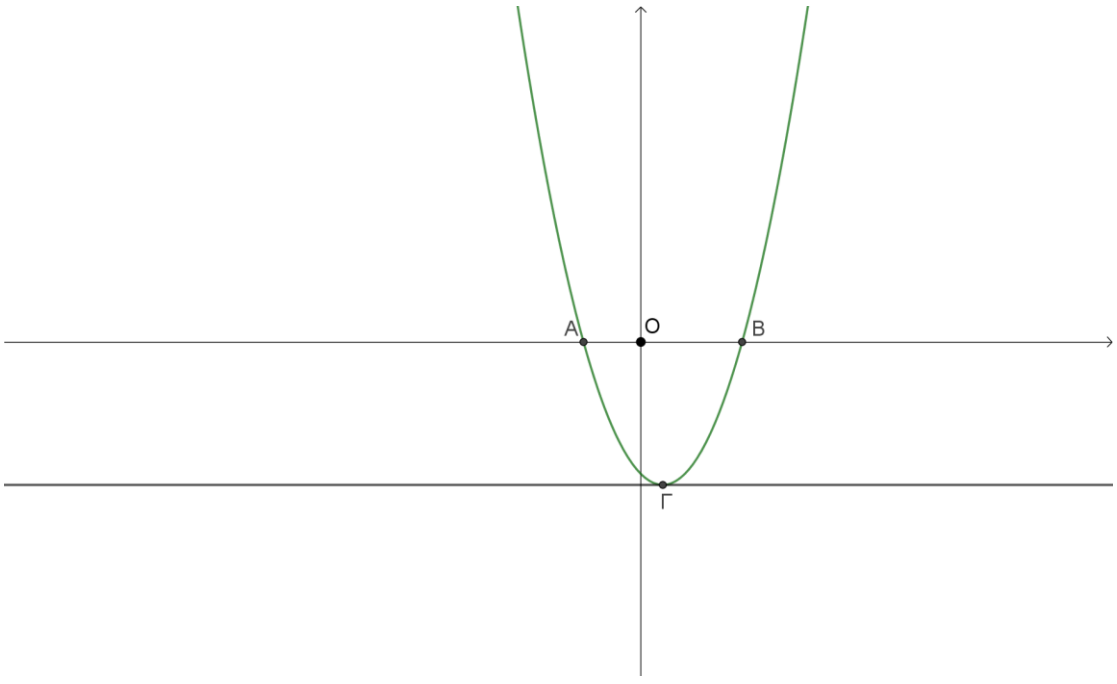
(Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι $\frac{1-\sqrt{13}}{2}<\sqrt{2}<\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τις τιμές των γ και δ.

(Μονάδες 7)



Θέμα 13318

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : R \to R$ με τύπο $f(x) = -x + \sqrt{2}$, $x \in R$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\sqrt{2})$, $f(-\sqrt{2})$, $[f(-\sqrt{2})]^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και στη συνέχεια *να* σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 13)

Θέμα 13319

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $1-x$, $\frac{x}{2}$, $2x-1, x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του x, αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5.

(Μονάδες 12)

Θέμα 13321

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1)

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \le 0$. (2)

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2).

(Μονάδες 8)

Θέμα 13322

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\frac{x}{x^2+2}+\sqrt{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε (εφόσον ορίζονται) τις τιμές της συνάρτησης g για $x=1,\ x=-2,\ x=2$.

(Μονάδες 9)

γ) Τέμνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τον $y'y$ άξονα;

(Μονάδες 8)

Θέμα 13323

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+4)^2 = x^2+y^2-2x+8y+17 .$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε: $x^2+y^2-2x+8y+17=0$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 13367

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = (\omega^2 - 6\omega + 8)x + 2$, όπου $\omega \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές του $\omega \in \mathbb{R}$ να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Αν ο αριθμός ω είναι ακέραιος και η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ είναι αμβλεία τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\omega = 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

(Μονάδες 5)

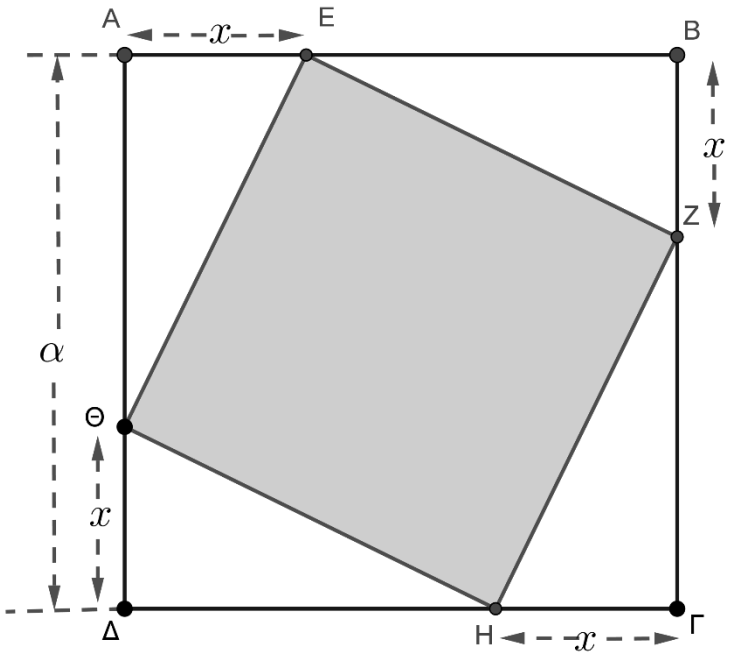
iii. Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

(Μονάδες 5)

Θέμα 13368

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου $EZH\Theta$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.



α) Αν η πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι α και η απόσταση των κορυφών του $EZH\Theta$ από τις αντίστοιχες κορυφές του $AB\Gamma\Delta$ είναι x, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\Theta$ δίνεται από τη σχέση:

$$(EZH\Theta) = x^2 + (\alpha - x)^2 \text{ με } 0 \leq x \leq \alpha.$$

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\Theta$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 11)

γ) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ αν για $x = 1$, το εμβαδόν του $EZH\Theta$ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$, δηλαδή: $(EZH\Theta) = \frac{2}{3}(AB\Gamma\Delta)$.

(Μονάδες 8)

(Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1{,}73$)

Θέμα 13400

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία ε: $y = -x + 2$.

α) Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε με τους άξονες.

(Μονάδες 9)

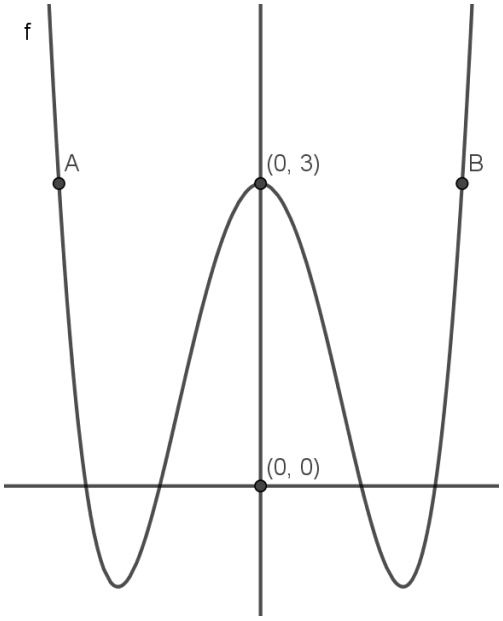
γ) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε.

(Μονάδες 7)

Θέμα 13454

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^4 - 4x^2 + \gamma$, η οποία είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.



α) Να δείξετε ότι $\gamma = 3$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $A(a^2 - 3,3)$ και $B(5 - 3a, 3)$ είναι σημεία της γραφικής παράστασης της f, όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να γράψετε τον τύπο της f.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του σχήματος και την απάντηση του ερωτήματος γ), να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

Θέμα 13471

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τα σημεία $A(2, 1), B(-1, -5), Γ(27, 50)$ και την ευθεία ε: $y = \lambda x - 3$. Αν το σημείο Α είναι πάνω στην ευθεία, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι πάνω στην ευθεία. Κατόπιν να εξετάσετε αν και το σημείο Γ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(Μονάδες 14)

Θέμα 13472

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$.

(Μονάδες 8)

ii. $\alpha + \beta = 1$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 13473

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{1-2x+x^2}$.

α) Να απλοποιήσετε την παράσταση Α.

(Μονάδες 6)

Δίνεται επιπλέον $1 \leq x \leq 3$.

β) i. Να δείξετε ότι Α=2.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x-3|-|x-1|=2$.

(Μονάδες 5)

γ) i. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=3-x$ και $g(x)=x-1$ για $1 \leq x \leq 3$.

(Μονάδες 6)

ii. Για ποιες τιμές του x είναι $|f(x)-g(x)|=2$.

(Μονάδες 4)

Θέμα 13474

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις

$$|x-1|\leq\sqrt{3} \quad (1) \quad \text{και} \quad 3-\frac{x+4}{2}<0 \quad (2)$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 5)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1).

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους.

(Μονάδες 8)

Θέμα 13479

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |3x - 12| - |2x - 8| - 3|x^2 - 16|$.

Αν $|x| \leq 4$, τότε:

α) Να γράψετε τον τύπο της συνάρτησης f χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 9)

β) Αν $f(x) = 3x^2 - x - 44$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

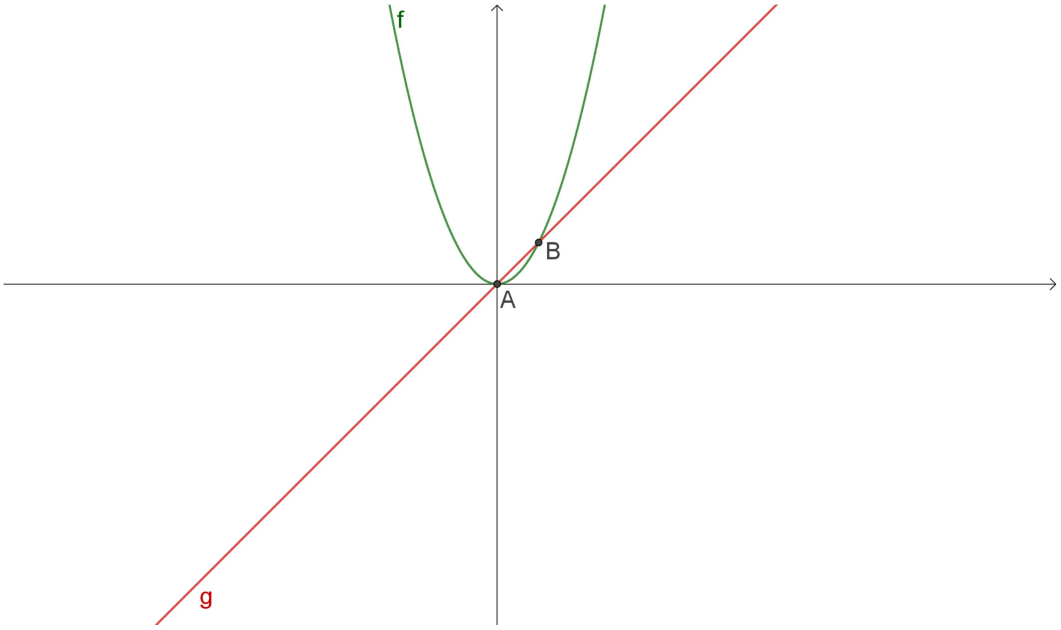
ii. Αν το σημείο $M(\mu + 1, -20)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f, να βρείτε την ακέραια τιμή του μ.

(Μονάδες 8)

Θέμα 13557

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x$ που τέμνονται στα σημεία A,B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B.

(Μονάδες 7)

β) Αν $\mathrm{A}(0,0),\mathrm{B}(1,1)$, τότε:

i. Με βάση το σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 5)

ii. Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο i. ερώτημα.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2<\frac{\alpha}{\beta}$ για τυχαίους πραγματικούς αριθμούς α,β με $\beta\neq 0$, να δείξετε (με βάση τα παραπάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο θέλετε) ότι $|\alpha|<|\beta|$.

(Μονάδες 6)

Θέμα 14052

ΘΕΜΑ 3

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-1=0$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $|x|+x=0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $|x|+|x^2-1|+x=0$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 14071

ΘΕΜΑ 2

α) Η αλγεβρική παράσταση Κ, που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1, πάνω στον άξονα είναι:

Α. Κ=|x+1|+|x-2| Β. Κ=|x-1|+|x+2| Γ. Κ=(|x|+1)+(|x|-2)

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

β) Αν είναι Κ=|x+1| + |x-2| τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Κ όταν $x=\frac{3}{2}$.

(Μονάδες 10)

ii) Αν x>2 να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση Κ και να αποδείξετε ότι Κ>3.

(Μονάδες 10)

Θέμα 14072

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Ανήκει το σημείο $\mathrm{M}(1,3)$ στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f;

(Μονάδες 8)

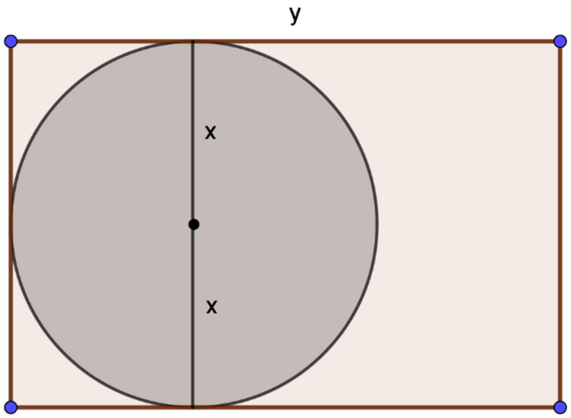
γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 14122

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο με μήκος y cm και περίμετρο 10 cm. Μέσα σε αυτό δίνεται κύκλος με ακτίνα x cm, ο οποίος εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ορθογωνίου.



α)

i. Να αποδείξετε ότι η σχέση που εκφράζει το μήκος y (σε cm) του ορθογωνίου ως συνάρτηση της ακτίνας x του κύκλου είναι:

$$y = 5 - 2x\,,\ x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου (σε cm^2) δίνεται από τη σχέση

$$\text{E}_{\text{ορθ}} = 10x - 4x^2\,,\ x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το μέρος του εμβαδού του ορθογωνίου (σε cm^2) που βρίσκεται έξω από τον κύκλο δίνεται από τη σχέση:

$$\text{E} = 10x - (\pi + 4)x^2\,,\ x \in \left(0, \frac{5}{2}\right).$$

(Μονάδες 6)

γ) Αν το εμβαδό E του ορθογωνίου που βρίσκεται έξω από τον κύκλο είναι ίσο με $(6 - \pi)\,\text{cm}^2$ και ο x είναι ένας ρητός αριθμός, τότε να βρείτε:

i. την ακτίνα x του κύκλου.

(Μονάδες 6)

ii. τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

(Μονάδες 3)

Θέμα 14123

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - \alpha x - (\alpha + 1), x \in R$, με παράμετρο $\alpha \in R$.

α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου.

(Μονάδες 7)

β) Αν είναι $\alpha > -2$, τότε:

(i) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $\alpha + 1$.

(Μονάδες 4)

(ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης $x^2 - \alpha x - (\alpha + 1) \leq 0$ είναι ίσο με 2024.

(Μονάδες 7)

(iii) Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

(Μονάδες 7)

Θέμα 14184

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{(x+2)(x+1)^2}{1+(x+2)x}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 4)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

(Μονάδες 8)

γ) Αν είναι $f(x)=x+2,\ x\neq -1$, τότε:

i. Να βρείτε τα σημεία στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τη γραφική παράσταση της $g(x)=x^2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x, για τις οποίες, η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g.

(Μονάδες 6)

Θέμα 14185

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x^3-2x^2+x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι : $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$, για κάθε $x\in A$.

(Μονάδες 4)

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=1$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι πάνω από την ευθεία $y=1$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 14189

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι $-1 < x < 4$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14190

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1$, $x \in R$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq -\frac{1}{2}$, τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τετμημένες α και $-\alpha - 1$ έχουν την ίδια τεταγμένη.

(Μονάδες 8)

γ) Θεωρούμε μεταβλητό σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f με τετμημένη $\beta > 0$. Από το Μ φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και έστω Α και Δ τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τους άξονες, όπου το Α ανήκει στον $x'x$ και το Δ στον $y'y$. Αποδείξτε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου ΟΑΜΔ είναι $\left[\sqrt{2}(\beta + 1)\right]^2$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 14224

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=\dfrac{x^2-1}{x^2-x}, x\neq 0, x\neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $\mathrm{A}=\dfrac{x+1}{x}$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται.

(Μονάδες 8)

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Θέμα 14225

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(x-2)(x^2-5x+4)}{x-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

(Μονάδες 5)

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2-6x+8, x\in A$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν είναι πάνω από την ευθεία $y=3$.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x)=x^4-6x-4$ τέμνει την γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 7)

Θέμα 14259

ΘΕΜΑ 2

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται οι δυο πρώτοι όροι, $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 7$.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο $20^{ος}$ όρος της προόδου ισούται με 97.

(Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $2+7+12+...+97$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 14295

ΘΕΜΑ 2

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x-1|\geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:

1.



2.



3.



4.



(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14306

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|y-3|<1$.

(Μονάδες 12)

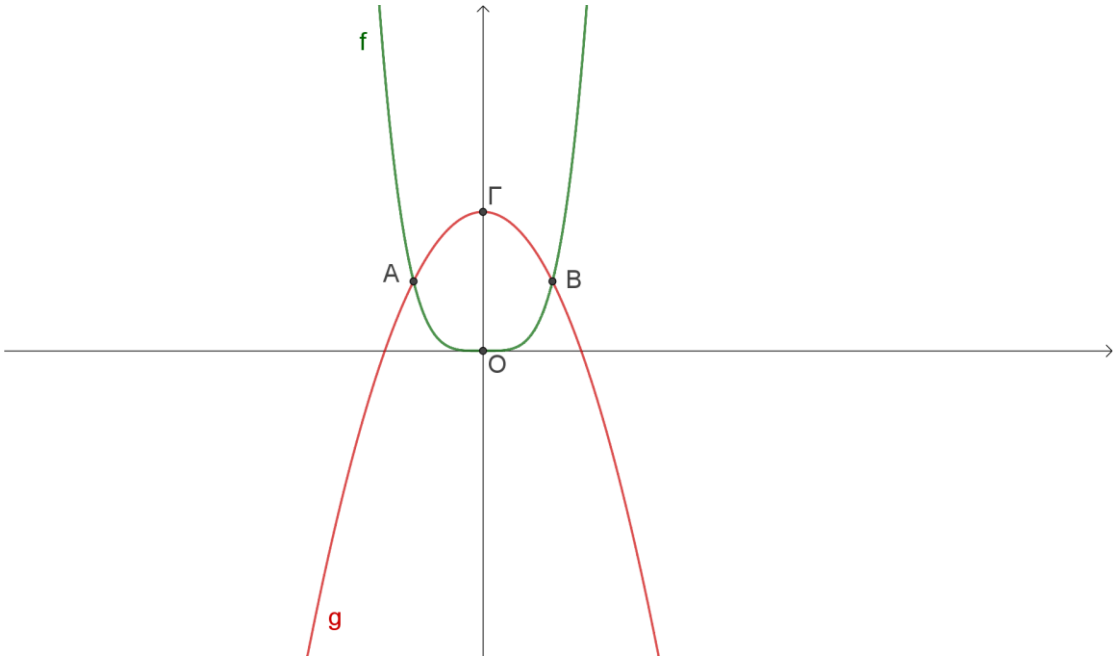
β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14307

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^4$ και $g(x)=2-x^2$. Τα σημεία A,B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f,g ενώ Γ είναι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της g με τον άξονα $y'y$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$.

(Μονάδες 9)

Αν $\mathrm{A}(-1,1),\mathrm{B}(1,1),\Gamma(0,2)$

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

(Μονάδες 6)

γ) Να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση σας στο ερώτημα β).

(Μονάδες 10)

Θέμα 14319

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|2x-5|<3$

α) Να λύσετε την ανίσωση.

(Μονάδες 12)

β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A=(\alpha-1)(\alpha-5).$$

(Μονάδες 13)

Θέμα 14320

ΘΕΜΑ 4

Σε κάποιο τόπο, μια χειμερινή μέρα, ξεκινάμε να μετράμε τη θερμοκρασία από τις 6 το πρωί και μετά. Ο τύπος που δίνει τη θερμοκρασία, x ώρες μετά τις 6 το πρωί, είναι:

$$f(x)=\begin{cases}2x+4, & x\in[0,6]\\ 16, & x\in(6,9]\\ 25-x, & x\in(9,12]\end{cases}$$

και μετριέται σε βαθμούς Κελσίου.

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία στον τόπο αυτό, στις 6 το πρωί, στις 12 το μεσημέρι και στις 5 το απόγευμα.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποιο χρονικό διάστημα της ημέρας η θερμοκρασία:

i. Διατηρείται σταθερή.

ii. Είναι μεγαλύτερη από 14 βαθμούς Κελσίου.

(Μονάδες 4+7=11)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

Θέμα 14329

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις $A=\frac{-\alpha}{\beta}, B=\alpha^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές των πραγματικών αριθμών α, β οι αλγεβρικές παραστάσεις A, B είναι πραγματικοί αριθμοί διαφορετικοί του 0.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί A, B είναι αντίθετοι, αν και μόνο, αν οι αριθμοί α, β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 15)

Θέμα 14375

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \mu x - 2,\ \mu \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι αριθμοί $x = -2$ και $x = 3$ βρίσκονται εκτός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$ ενώ ο $x = 1$ βρίσκεται εντός του διαστήματος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον οι τιμές $f(-2),\ f(1),\ f(3)$ με τη σειρά που δίνονται αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε:

i. Να βρείτε τις τιμές του μ.

(Μονάδες 7)

ii. Για $\mu = \frac{13}{7}$ να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

Θέμα 14406

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει:

$\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης Κ = $\frac{\alpha^{22}\cdot(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β, έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο.

(Μονάδες 5)

Θέμα 14410

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $\mathrm{A}=\alpha^2+\alpha+\frac{1}{4}$ και $\mathrm{B}=(\beta-3)^2$.

α)

i. Να δείξετε ότι $\mathrm{A}+\mathrm{B}\geq 0$ για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

ii. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α,β έτσι, ώστε $\mathrm{A}+\mathrm{B}=0$.

(Μονάδες 8)

β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, ώστε $\mathrm{A}=-\mathrm{B}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

Θέμα 14412

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha} = 2$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha-\beta}{|\alpha-\beta|} - \frac{|1-\alpha|}{1-\alpha}$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14452

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{3}-1$ και $\beta=\sqrt{3}+1$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=10$.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1=5$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 14458

ΘΕΜΑ 2

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει:

$$(x+4y)(x+y)=9xy\,.$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $(2y-x)^2=0$

(Μονάδες 8)

ii. $y=\frac{x}{2}$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2y-\frac{x}{2}\right)^2+\left(2y+\frac{x}{2}\right)^2=10y^2$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 14459

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ και η ευθεία $y=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι αν $0<\alpha<1$, τότε η C_f έχει με την ευθεία δυο κοινά σημεία των οποίων να βρείτε τις τετμημένες.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό x ισχύει $|xf(x)|\leq\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 14473

ΘΕΜΑ 2

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$.

α) Να δείξετε ότι $y=2x$.

(Μονάδες 12)

β) Για $y=2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14474

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+3x-5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14475

ΘΕΜΑ 2

Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \le \alpha \le 4$ και $-4 \le \beta \le -3$, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha + 2\beta$.

(Μονάδες 12)

β) $\alpha - \beta$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14476

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: $1,\ 3, 5, 7, ...$

α)

i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2.

(Μονάδες 13)

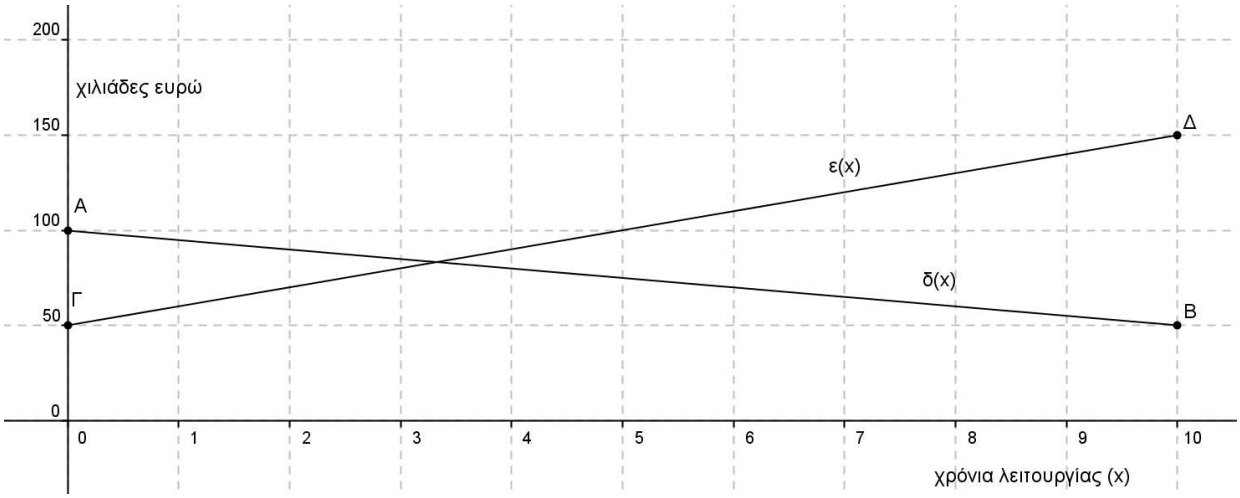
Θέμα 14477

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων η ευθεία AB με $A(0,100)$ και $B(10,50)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $\delta(x)$ των ετήσιων δαπανών μιας εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Η ευθεία $\Gamma\Delta$ με $\Gamma(0,50)$ και $\Delta(10,150)$ παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης των ετήσιων εσόδων $\varepsilon(x)$ της εταιρείας, σε χιλιάδες ευρώ, στα x χρόνια της λειτουργίας της.

Οι γραφικές παραστάσεις αναφέρονται στα δέκα πρώτα χρόνια λειτουργίας της εταιρείας.



α) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να εκτιμήσετε τα έσοδα και τις δαπάνες τον πέμπτο χρόνο λειτουργίας της εταιρείας.

(Μονάδες 4)

β)

i. Να προσδιορίσετε τους τύπους των συναρτήσεων $\delta(x)$, $\varepsilon(x)$ και να ελέγξετε αν οι εκτιμήσεις σας στο α) ερώτημα ήταν σωστές.

(Μονάδες 15)

ii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών AB και $\Gamma\Delta$ και να τις ερμηνεύσετε στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

Θέμα 14490

ΘΕΜΑ 4

Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού.

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in R$.

Να βρείτε:

i. Το σύνολο Α που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 10)

ii. Την πραγματική τιμή του λ, αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

(Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης.

(Μονάδες 4)

Θέμα 14491

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|y-3|<1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14492

ΘΕΜΑ 2

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:

α) Να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14512

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2=1$ και $x^2=9$.

(Μονάδες 9)

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

i. να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 9)

ii. να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_ν).

(Μονάδες 7)

Θέμα 1454

ΘΕΜΑ 4

Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός α γράφεται στη μορφή $a=2k+1$, k ακέραιος.

α) Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων.

(Μονάδες 6)

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο.

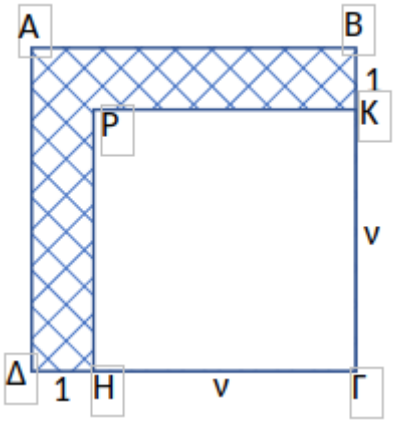
(Μονάδες 6)

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

(Μονάδες 6)

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με (ΓΗ)=(ΓΚ)=ν και (ΒΚ)=(ΔΗ)=1. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου ν.

(Μονάδες 7)



Θέμα 14555

ΘΕΜΑ 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση

$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $P = (x + y)^3(x - y)^3$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14556

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα έχει σχεδιασθεί σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x) = ax + \beta$, όπου α, β σταθεροί μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί και $x \in R$. Θεωρούμε τα σημεία Α και Β της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$, των οποίων οι προβολές στους άξονες x΄x, y΄y είναι τα σημεία Η,Δ και Κ,Ε αντίστοιχα. Γνωρίζουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΗΚ και ΔΕ έχουν μήκη 6 και 9 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $a = -\frac{3}{2}$

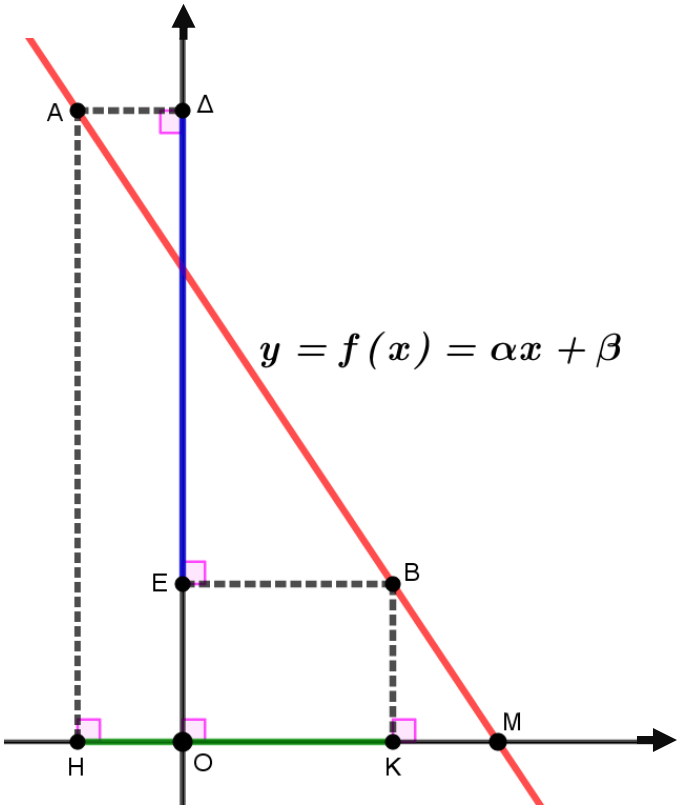
(Μονάδες 9)

β) Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το σημείο Μ έχει τετμημένη 6, να αποδείξετε ότι $\beta = 9$.

(Μονάδες 7)

γ) Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΚ έχει μήκος 4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) η οποία διέρχεται από το σημείο Ε και είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

(Μονάδες 9)



Θέμα 14562

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}$.

α)

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$ για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y=1$ έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της $\left|f(x)\right|$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 14572

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $|x+2|<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$.

(Μονάδες 10)

β) $|2x+4|<2$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 14573

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 15)

Θέμα 14574

ΘΕΜΑ 2

Ο $1^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) ισούται με 2 και ο $3^{ος}$ όρος ισούται με 8.

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14575

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x$, για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

Θέμα 14576

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{2x^2-6|x|}{2|x|-6}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=|x|$, για κάθε $x\in \mathrm{A}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, για $x>0$.

(Μονάδες 5)

Θέμα 14577

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\mathrm{A} = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0, x \neq -1$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 14578

ΘΕΜΑ 3

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση

$$\Pi = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x}$$

(Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \frac{1}{1 - x} = 0 .$$

(Μονάδες 15)

Θέμα 14596

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x+1}$ με $x \neq -1$.

α) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι $f(x)=x-3$ για κάθε $x \neq -1$.

(Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 14597

ΘΕΜΑ 2

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα.

α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς.

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά.

(Μονάδες 9)

Θέμα 14599

ΘΕΜΑ 2

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x|<2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1<x<1$.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(-1,1)$, ισχύει $x^2<1$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14601

ΘΕΜΑ 3

Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x-1|<1$, τότε:

α) Να δείξετε ότι $0<x<1$.

(Μονάδες 12)

β) Να βάλετε σε αύξουσα διάταξη τους αριθμούς $1,\ x,\ x^2$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14602

ΘΕΜΑ 3

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $0 < \alpha^3 < \alpha$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}.$$

(Μονάδες 12)

Θέμα 14603

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\le 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

β) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $y'y$ άξονα.

(Μονάδες 9)

Θέμα 14604

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases}2x-5, & x\le 3\\ x^2, & 3<x<10\end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1), f(3)$ και $f(5)$.

(Μονάδες 6)

γ) Διέρχεται η γραφική παράσταση της f από την αρχή των αξόνων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f που έχει τεταγμένη $y=21$.

(Μονάδες 7)

Θέμα 14615

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in R$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ, πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

Έστω ρ_1 , ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ, η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8.

(Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό k ώστε $\rho_1 < k < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $k^2 - 2\lambda k + \lambda^2 - 1$

(Μονάδες 6)

Θέμα 14617

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$.

α) Να δείξετε ότι $6 < x < 8$.

(Μονάδες 12)

β) Αν ισχύει $6 < k < 8$, να δείξετε ότι $3 < \frac{24}{k} < 4$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14628

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-4}{x}$, $x\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(4, 3)$.

(Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο $B(-4, -3)$ είναι σημείο της C_f.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y=3$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 14629

ΘΕΜΑ 4

Σε μια γραπτή εξέταση 100 ερωτήσεων Σ-Λ (Σωστό - Λάθος) σε κάποιο Πανεπιστήμιο, κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 1 μονάδα και κάθε λανθασμένη απάντηση βαθμολογείται με $-\frac{1}{3}$ της μονάδας (για κάθε τριάδα λανθασμένων απαντήσεων αφαιρείται μια μονάδα).

α) Να αποδείξετε ότι αν ένας φοιτητής απαντήσει σωστά σε x από τις 100 ερωτήσεις, τότε η βαθμολογία του $E(x)$ δίνεται από τον τύπο $E(x)=\frac{4}{3}(x-25)$.

(Μονάδες 7)

β) Ένας φοιτητής βαθμολογήθηκε με 88. Πόσες ήταν οι σωστές και πόσες οι λανθασμένες απαντήσεις που έδωσε;

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η βαθμολογία ενός φοιτητή δεν μπορεί να είναι ίση με 50. Πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας φοιτητής για να πάρει βαθμολογία μεγαλύτερη από τη βάση που είναι 50;

(Μονάδες 8)

δ) Το άθροισμα των επιδόσεων δυο φοιτητών ήταν 140. Πόσες ήταν οι λανθασμένες απαντήσεις και των δυο μαζί;

(Μονάδες 6)

Θέμα 14641

ΘΕΜΑ 2

Η παρακάτω ευθεία ε σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o.

α) Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας ε.

(Μονάδες 7)

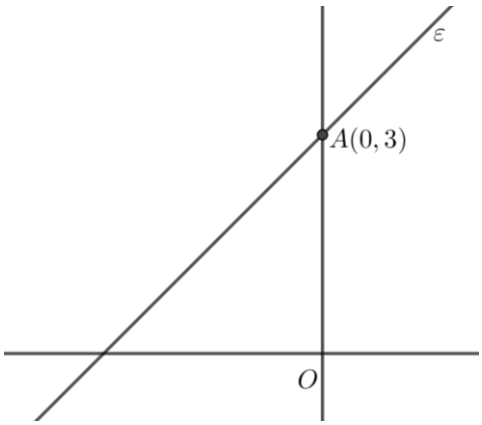
β) Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας ε.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το σημείο τομής της ευθείας ε με τον άξονα $x'x$.

(Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi 45^o = 1$)

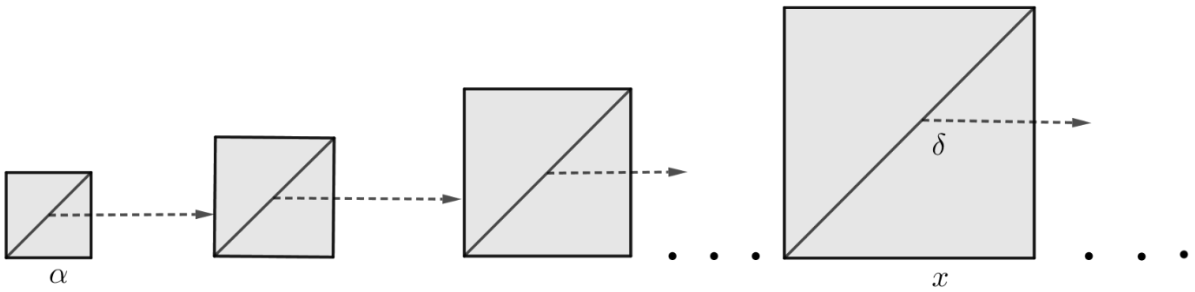
(Μονάδες 9)



Θέμα 14645

ΘΕΜΑ 4

Ένας ζωγράφος ξεκινώντας από ένα τετράγωνο πλευράς α, σχεδιάζει διαδοχικά τετράγωνα παίρνοντας κάθε φορά ως πλευρά του νέου τετραγώνου, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου όπως φαίνεται στο σχήμα:



α)

i. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου έχει μήκος x, να αποδείξετε ότι η διαγώνιός του δ έχει μήκος $\delta = \sqrt{2} \cdot x$.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των διαδοχικών τετραγώνων είναι όροι γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda = 2$ και γενικό όρο $\alpha_\nu = \alpha^2 2^{\nu-1}$.

(Μονάδες 7)

β) Αν το εμβαδόν του τέταρτου κατά σειρά τετραγώνου ισούται με $8\ \tau.\mu.$, να βρείτε:

i. την πλευρά α του αρχικού τετραγώνου.

(Μονάδες 8)

ii. το πλήθος των αρχικών τετραγώνων με συνολικό εμβαδόν $255\ \tau.\mu.$

(Μονάδες 6)

Θέμα 14649

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = |x + 1| + 2$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K = \begin{cases} x + 3, & \text{αν } x \geq -1 \\ 1 - x, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$

(Μονάδες 12)

β)

i. Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 4$.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K, αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

Θέμα 14650

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| \leq 3$ (1).

(Μονάδες 7)

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x-1|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x-1| \leq 3$.

(Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x|-1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας.

(Μονάδες 8)

Θέμα 14651

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4(\lambda + \frac{1}{\lambda})x + 16 = 0 \text{ όπου } \lambda > 0 \ .$$

α) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

Θέμα 14652

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i. Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ii. Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$.

(Μονάδες 7)

Θέμα 14653

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η ανίσωση $|x-1| \leq 3$. (1)

α) Να λύσετε την ανίσωση (1).

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 3)

γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1).

(Μονάδες 8)

δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3.

(Μονάδες 7)

Θέμα 14654

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2-3x+2,\ x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α,β με $\alpha<\beta$ για τους οποίους ισχύει

$$\left(\alpha^2-3\alpha+2\right)\left(\beta^2-3\beta+2\right)<0\ .$$

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha-1$και $\beta-2$ είναι ομόσημοι .

(Μονάδες 10)

ii. Να δείξετε ότι $\left|(\alpha-1)(\beta-2)\right|=(\alpha-1)(\beta-2)$.

(Μονάδες 5)

Θέμα 14655

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A = 90°$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x και y τέτοια, ώστε x+y=10.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου τριγώνου ως συνάρτηση του x δίνεται από τον τύπο $\mathrm{E}(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}(10\mathrm{x} - \mathrm{x}^2)$ με $\mathrm{x} \in (0,10)$.

(Μονάδες 8)

β) i. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{E}(\mathrm{x}) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $\mathrm{x} \in (0,10)$.

(Μονάδες 7)

ii. Για ποια τιμή του x το εμβαδόν γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

(Μονάδες 6)

γ) Αν x=5, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το είδος του τρίγωνου ως προς τις πλευρές του;

(Μονάδες 4)

Θέμα 14656

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (αν) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3.

(Μονάδες 12)

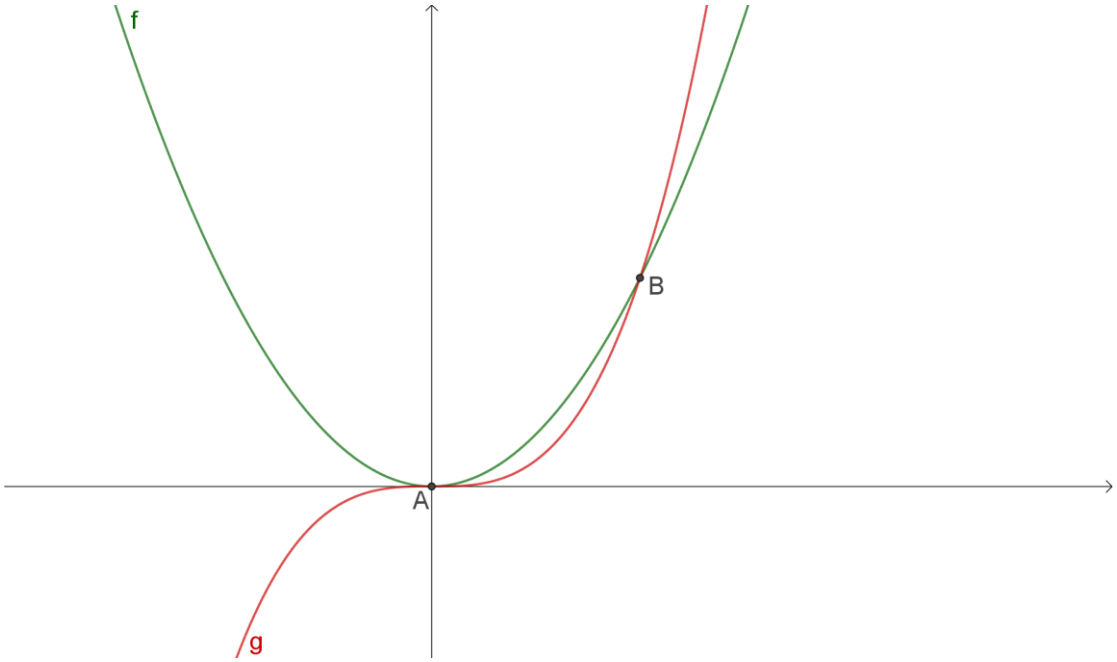
β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14665

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=x^3$ που τέμνονται στα σημεία A,B.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A,B.

(Μονάδες 8)

Έστω $\mathrm{A}(0,0),\mathrm{B}(1,1)$.

β) Με βάση το παραπάνω σχήμα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει ότι $x^3<x^2$.

(Μονάδες 6)

γ) Είναι ο κύβος οποιουδήποτε αριθμού μεγαλύτερος από το τετράγωνό του;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

δ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi=3,1415...$ να δείξετε ότι

i. $(\pi-3)^3<(\pi-3)^2$.

(Μονάδες 3)

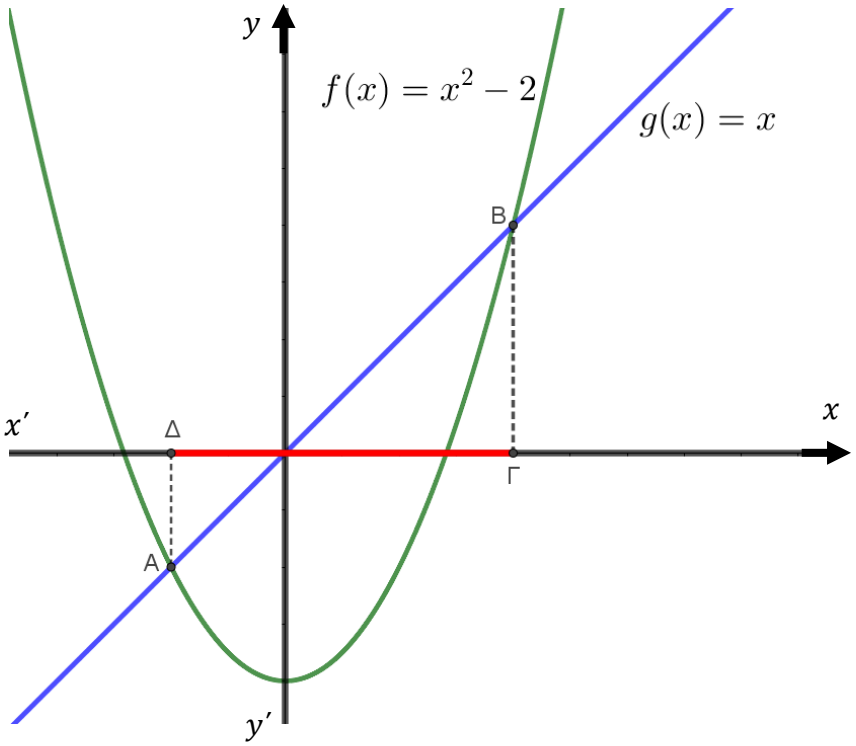
ii. $\pi^3-10\pi^2+33\pi-36<0$.

(Μονάδες 3)

Θέμα 14673

ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2 - 2$ και $g(x) = x$.



α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Α και Β είναι $A(-1,-1)$ και $B(2,2)$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - x - 2 < 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\omega^2 - |\omega| - 2 < 0$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 14681

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ 2x + 2, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές $f(3)$ και $f(-3)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = 8$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14682

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι: $\sqrt[3]{3} < \sqrt{3}$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14702

ΘΕΜΑ 4

Για τις ανάγκες ενός αρχιτεκτονικού σχεδίου ενός κτηρίου, απαιτείται η κατασκευή μιας μακέτας ενός πάρκου, σχήματος ορθογώνιου ΑΒΓΔ, με διαστάσεις x και $2x-1$, όπου $x > \frac{1}{2}$.

α) Να εκφράσετε την περίμετρο Π και το εμβαδόν Ε της μακέτας σε συνάρτηση του x.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνονται οι διαστάσεις της μακέτας, ώστε η περίφραξη του πάρκου στη μακέτα, να μη ξεπερνά τα 8 μέτρα.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε το εμβαδόν της μακέτας, να είναι το πολύ 1 τετραγωνικό μέτρο.

(Μονάδες 10)

Θέμα 14704

ΘΕΜΑ 2

Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$

(Μονάδες 5)

β) $2x-3y$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

Θέμα 14713

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η παράσταση $A=\dfrac{\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18}{\alpha^2+2\alpha}$, $\alpha>0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^3+2\alpha^2+9\alpha+18=(\alpha^2+9)(\alpha+2)$.

(Μονάδες 7)

β) Για κάθε $\alpha>0$ ισχύει

i. $A=\dfrac{\alpha^2+9}{\alpha}$.

(Μονάδες 8)

ii. $A\geq 6$. Πότε ισχύει η ισότητα $A=6$;

(Μονάδες 10)

Θέμα 14728

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$.

α) Να βρείτε τις τιμές της συνάρτησης $f(-1)$ και $f(1)$.

(Μονάδες 12)

β) Για $x\geq 0$ να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq 2$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14730

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=|x-2|+3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε

i. Την τιμή της παράστασης A για $x=2^3-3^2$.

(Μονάδες 8)

ii. Τις τιμές του x, ώστε να ισχύει $\mathrm{A}=5$.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Θέμα 14731

ΘΕΜΑ 1

Α. Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να επιλέξετε Σωστό (Σ), αν η πρόταση που διατυπώνεται είναι σωστή και Λάθος (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \geq 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{a}+\sqrt{\beta}$.

β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι $|\alpha+\beta| \leq |-\alpha|+|\beta|$.

γ) Κάθε ευθεία η οποία έχει θετική κλίση, σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία.

δ) Η εξίσωση $x^3=-8$ είναι αδύνατη στους πραγματικούς αριθμούς.

ε) Αν είναι $\alpha\beta>1$, τότε θα ισχύει αναγκαστικά $\alpha>1$ και $\beta>1$.

(Μονάδες 15)

Β. Δίνεται η εξίσωση $ax^2+\beta x+\gamma=0, \alpha \neq 0$. Αν έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1, x_2, τότε να αποδείξετε ότι το άθροισμά τους είναι ίσο με $x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 14741

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $\mathrm{K}=\dfrac{\alpha\left(\alpha^2-2\alpha+1\right)}{\alpha^3-\alpha^2}, \alpha\neq 0, \alpha\neq 1.$

α) Να δείξετε ότι $\mathrm{K}=\dfrac{\alpha-1}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

β) Για κάθε $\alpha\neq 0$ και $\alpha\neq 1$,

i. Να δείξετε ότι $\mathrm{K}\neq 0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η ισότητα $\mathrm{K}(\mathrm{K}-2)=0$.

(Μονάδες 6)

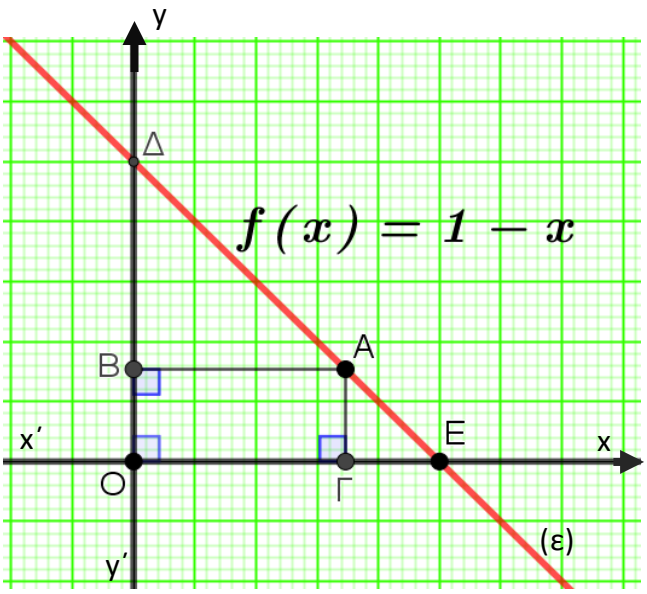
Θέμα 14744

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι $x - x^2 \leq \frac{1}{4}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Πότε ισχύει το ίσον;

(Μονάδες 8)

β) Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιασθεί η γραφική παράσταση (ε) της συνάρτησης $f(x) = 1 - x,\ x \in R$, η οποία τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Ε και Δ αντίστοιχα. Ένα μεταβλητό σημείο Α, με τετμημένη α, κινείται επί της ευθείας (ε) και μεταξύ των σημείων Δ και Ε. Φέρνουμε από το Α καθέτους στους άξονες και έστω Β και Γ τα σημεία τομής με $y'y$ και $x'x$ αντίστοιχα.



i. Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΟΓ.

(Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του εμβαδού του μεταβλητού ορθογωνίου ΑΒΟΓ είναι $\frac{1}{4}$. Για ποια θέση του σημείου Α επιτυγχάνεται αυτή η τιμή;

(Μονάδες 7)

Θέμα 14745

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$. Κάποια σημεία της γραφικής παράστασης που έχουν ακέραιες συντεταγμένες έχουν σημειωθεί με έντονο τρόπο.

α) Να λύσετε την ανίσωση $-2 \leq g(x) \leq 0$.

(Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|g(x)| \leq 2$.

(Μονάδες 7)

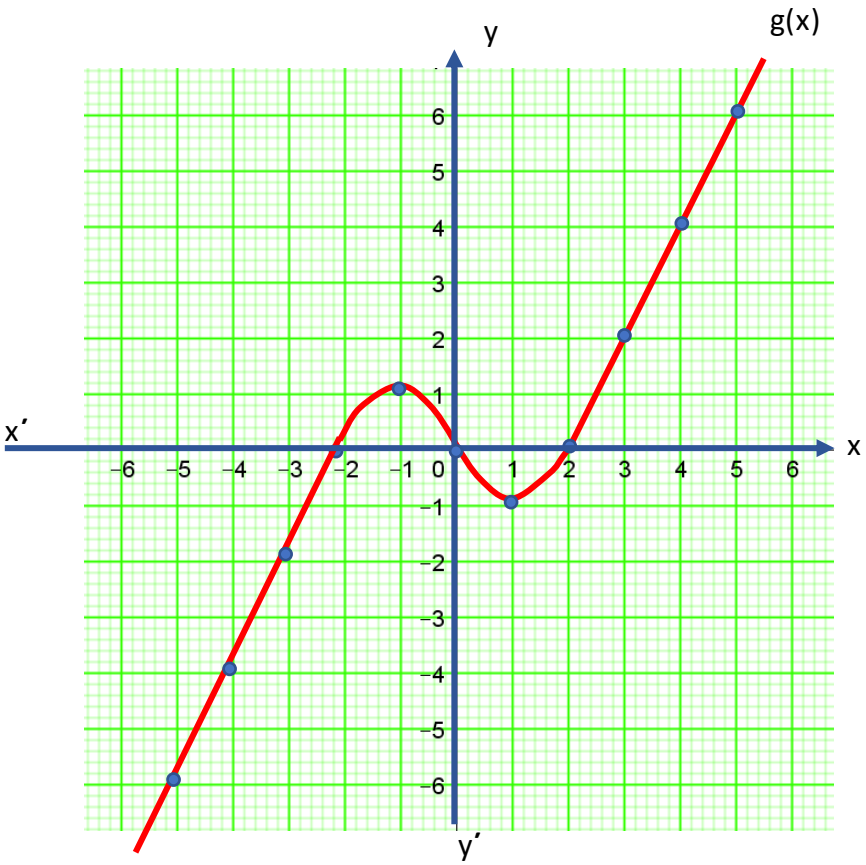
γ)

i. Να βρείτε το πλήθος λύσεων των εξισώσεων $g(x) = \frac{4}{5}$ και $g(x) = -1$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε το πλήθος λύσεων της εξίσωσης $g(x) = k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου k.

(Μονάδες 6)



Θέμα 14749

ΘΕΜΑ 3

α)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, ορίζεται η παράσταση: $\mathrm{A} = \dfrac{x}{x - |x|}$.

(Μονάδες 9)

ii. Για τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A, να δείξετε ότι $\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}$.

(Μονάδες 7)

β) Για $x < 0$, να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{x^3}{x - |x|} = \dfrac{3}{2}x + 2$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 14750

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α , β , με $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2} - 2$.

Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 15$.

(Μονάδες 12)

β) $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14752

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι το σημείο $\mathrm{M}(1,-\sqrt{2})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx', yy'.

(Μονάδες 10)

Θέμα 14753

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x για τους οποίους ισχύει $2|x|-2\le 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι $x\in[-1,1]$.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την (1) απέχουν από το -3 απόσταση το πολύ 4.

(Μονάδες 5)

γ) Για τους πραγματικούς αριθμούς x που ικανοποιούν την (1) να γράψετε την παρακάτω παράσταση Α χωρίς τις απόλυτες τιμές.

$A=|2x-3|-|4-3x|$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 3

α) Να δείξετε ότι $x^2+2x+4>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left|\dfrac{x^3-8}{x-2}\right|$.

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A.

(Μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=x^2+2x+4$ για κάθε $x\in\mathrm{A}$.

(Μονάδες 6)

δ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κοινά σημεία με τη γραφική παράσταση της g, όπου $g(x)=6x$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 14758

ΘΕΜΑ 4

Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα.

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου;

(Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια;

(Μονάδες 6)

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το $250^{ο}$ αυτοκίνητο;

(Μονάδες 7)

Θέμα 14759

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$.

(Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}.$$

(Μονάδες 5)

Θέμα 14760

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση: $g(x)=\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-x-12}}\right]^3\cdot(x^2-16)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $g(x)=\frac{x+4}{x+3}$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

Θέμα 14763

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{3\sqrt{x^2-8x+\lambda}}{x-4}+2,$ για $x\neq 4$ και $\lambda\geq 16.$

α) Να βρείτε το $\lambda\geq 16$ ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο της $M(0,-1).$

(Μονάδες 7)

β) Αν $\lambda=16$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}-1, & x<4\\ 5, & x>4\end{cases}.$

(Μονάδες 7)

ii. Να σχεδιάσετε σε σύστημα αξόνων τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 5)

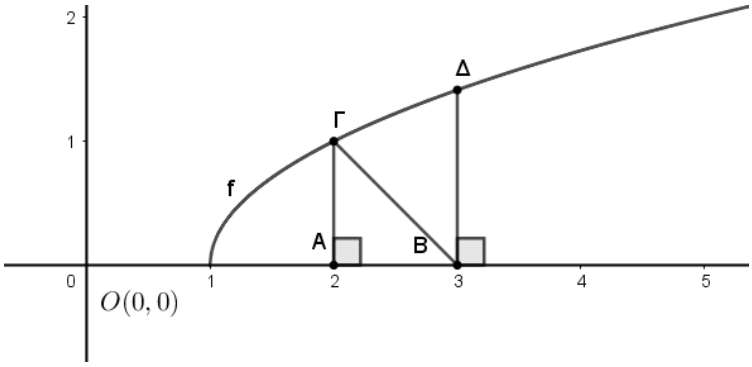
iii. Για $x<4,$ να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f των οποίων η απόστασή τους από το σημείο $A(-1,-1)$ είναι 10 μονάδες μήκους.

(Μονάδες 6)

Θέμα 14771

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x-a}$ όπου $a \in \mathbb{R}$.



α) Με βάση το σχήμα, να δείξετε ότι $a = 1$.

(Μονάδες 6)

β) Αν $a = 1$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

γ)

i. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων Γ και Δ είναι $(2,1)$ και $(3,\sqrt{2})$ αντίστοιχα.

(Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το μήκος του τμήματος $B\Gamma$.

(Μονάδες 4)

iii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)

Θέμα 14774

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι $\left(2+\sqrt{5}\right)^2 = 9+4\sqrt{5}$ και $\left(1-\sqrt{5}\right)^2 = 6-2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να δείξετε ότι $\sqrt{9+4\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}} = 1+2\sqrt{5}$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 14781

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας τιμών μιας αντιστοίχισης $x \to y$ με το x να παίρνει μόνο τις τιμές: $-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1$ και 3.

x	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	3
y	0	-4	-6	$-\frac{25}{4}$	-6	0

α)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί η παραπάνω αντιστοίχιση $x \to y$ είναι συνάρτηση.

ii. Είναι η αντιστοίχιση $y \to x$ συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

β) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $x \to y$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 14782

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

i. Τα σημεία $\mathrm{A}(x,y)$ και $\mathrm{B}(-x,y)$ είναι για κάθε τιμή των x,y συμμετρικά ως προς τον άξονα xx'.

ii. Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$ με $\alpha<0$ και ν περιττό, έχει ακριβώς μία λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

iii. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $|\alpha|+|\beta|=|\alpha+\beta|$.

iv. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες αν και μόνο αν $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$.

v. Για κάθε γεωμετρική πρόοδο (α_{ν}) με λόγο $\lambda=1$, το άθροισμα των ν πρώτων όρων της δίνεται από τον τύπο $S_{\nu}=\nu\cdot\alpha_1$.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$ να δείξετε ότι $\mathrm{P}=x_1\cdot x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 14786

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2-\lambda^2, \mu)$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ.

(Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ.

(Μονάδες 6)

γ) Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$

i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A ,B.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

Θέμα 14801

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση Σ (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή Λ (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

i. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η πρόταση:

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$.

ii. Για κάθε $\theta \in (0, +\infty)$ ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

iii. Η εξίσωση $x^3 = 5$ έχει δύο πραγματικές ρίζες.

iv. Αν ισχύουν $\alpha > 0$ και $\Delta < 0$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, τότε το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι αρνητικό για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x.

v. Ο παρακάτω πίνακας θα μπορούσε να είναι πίνακας τιμών μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 4]$.

x	0	1	1	2	4
$y = f(x)$	0	1	-1	2	0,5

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει η ανισότητα:

$$|\alpha + \beta| \le |\alpha| + |\beta|.$$

(Μονάδες 15)

Θέμα 14805

ΘΕΜΑ 3

Έστω α ένας πραγματικός αριθμός, για τον οποίο ισχύει $\alpha = \left|3\sqrt{2}-4\right| + 2\left|\sqrt{2}-2\right|$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = \sqrt{2}$. (Θεωρήστε ότι $\sqrt{2} = 1,41$)

(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να αποδείξετε ότι $\alpha^3 = 2\alpha$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \alpha^3 + (\alpha-1)^2$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 14809

ΘΕΜΑ 4

Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων

ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ…

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23^η φορά το γράμμα Β.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200^η θέση στην παραπάνω διαδοχή.

(Μονάδες 9)

Θέμα 14810

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-7x+\kappa, \kappa\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη $y=10$.

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa=10$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση C_f της f είναι κάτω από τον άξονα x'x.

(Μονάδες 6)

γ) Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$, $\alpha<\beta$ δυο σημεία της C_f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x'x.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha<\frac{2\alpha+3\beta}{5}<\beta$

(Μονάδες 6)

ii. Να εξετάσετε αν το σημείο της C_f με τετμημένη $x_o=\frac{2\alpha+3\beta}{5}$ βρίσκεται πάνω ή κάτω από τον άξονα x΄x.

(Μονάδες 8)

Θέμα 14811

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Το σημείο $M(x, y)$ με $x > 0$ και $y < 0$ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων.

ii. Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει: $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$.

iii. Ισχύει $|\alpha| \geq \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

iv. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε: $\alpha - \gamma > \beta - \delta$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ.

v. Η εξίσωση $\alpha x = \alpha$ έχει μοναδική λύση $x = 1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 14813

ΘΕΜΑ 1

Α1. Στις τέσσερις πρώτες ερωτήσεις να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν η πρόταση είναι λάθος, μετά από τον αριθμό της ερώτησης. Στην πέμπτη ερώτηση να γράψετε το γράμμα της σωστής απάντησης μετά από τον αριθμό της ερώτησης.

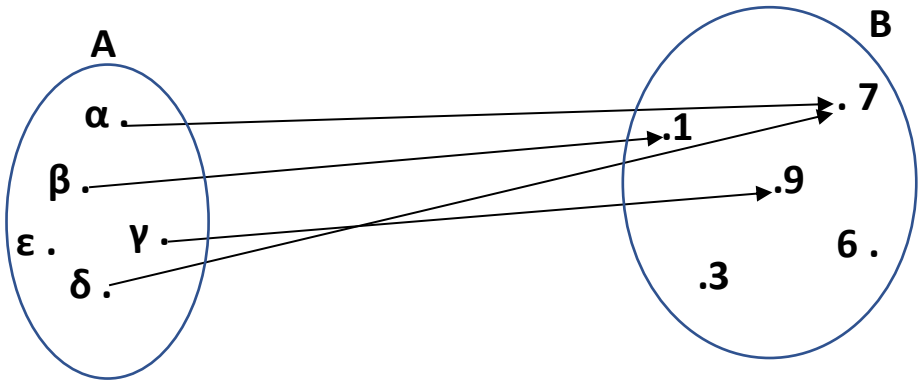
i) Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε ισχύει $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|$.

ii) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$ μπορεί να τέμνει τον άξονα $y'y$ σε ακριβώς δύο σημεία.

iii) Θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο (α_ν) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω. Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων διαδοχικών όρων της (α_ν) δίνεται από την σχέση $S_\nu = \frac{\nu}{2}[\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]$.

iv) Η εξίσωση $\alpha \cdot x + \beta = 0$ είναι αδύνατη ως προς x, όταν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$

v)



Στο παραπάνω σχήμα δίνεται μια αντιστοιχία στοιχείων ενός συνόλου Α σε στοιχεία ενός συνόλου Β. Ποιο από τα παρακάτω είναι σωστό;

Α) η αντιστοιχία αυτή παριστάνει συνάρτηση από το σύνολο Α στο σύνολο Β.

Β) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι στο 3 και στο 6 δεν αντιστοιχεί κανένα στοιχείο του Α.

Γ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι τα διαφορετικά στοιχεία α και δ του συνόλου Α αντιστοιχούν στο ίδιο στοιχείο του συνόλου Β, το 7.

Δ) η αντιστοιχία αυτή δεν παριστάνει συνάρτηση διότι το στοιχείο ε δεν αντιστοιχεί σε κανένα στοιχείο του Β.

(Μ10)

Α2. Έστω x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο πραγματικές ρίζες του τριωνύμου $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $x \in R$. Να αποδείξετε ότι, αν για την μεταβλητή x ισχύει $x < x_1$ ή $x > x_2$ τότε τότε το τριώνυμο $f(x)$ γίνεται ομόσημο του α.

Θέμα 14820

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες.

i. $x^2+x+1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

ii. $x^2-x+1 \geq \frac{3}{4}$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2+x+1)(x^2-x+1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A} = \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2-1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A.

(Μονάδες 5)

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$.

(Μονάδες 6)

Θέμα 14829

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Αν $\alpha+\beta=\gamma+\delta$ τότε $\alpha=\gamma$ και $\beta=\delta$

ii. Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, ισχύει $|-\alpha|=\alpha$.

iii. Η γραφική παράταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

iv. Αν το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

v. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y=\alpha_1 x+\beta_1$ και $\varepsilon_2: y=\alpha_2 x+\beta_2$ δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, τότε $\alpha_1=\alpha_2$ και $\beta_1\neq\beta_2$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τρεις αριθμοί α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 14849

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\left(2 - \sqrt{5}\right)^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 14920

ΘΕΜΑ 2

Μια γεωμετρική πρόοδος (α_ν) έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = 4$, λόγο $\lambda > 0$ και $\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

Θέμα 14924

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου x^2-x-12 για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2-\left(\frac{\pi+9}{3}\right)-12>0$, όπου $\pi=3,1415\ldots$.

(Μονάδες 9)

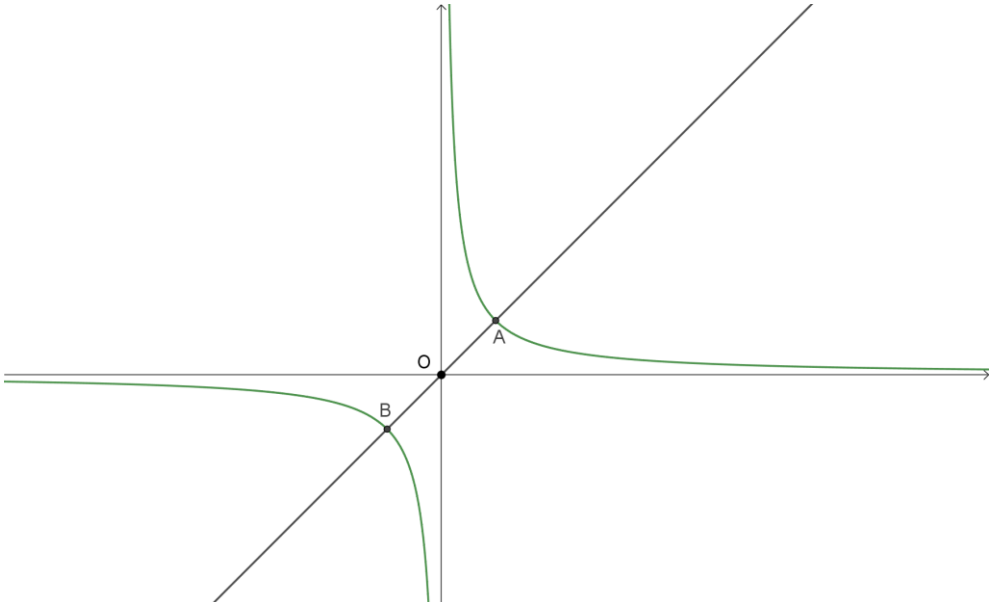
γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha|+3)^2-(|\alpha|+3)-12<0$, να δείξετε ότι $\alpha\in(-1,1)$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 14925

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$ και η ευθεία AB με εξίσωση $y=x$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των A,B και να δείξετε ότι το $\mathrm{O}(0,0)$ είναι το μέσο του AB.

(Μονάδες 9)

Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ τυχαίο σημείο της γραφική παράστασης της f.

β) Να δείξετε ότι και το συμμετρικό M' του M ως προς το O(0,0) ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 8)

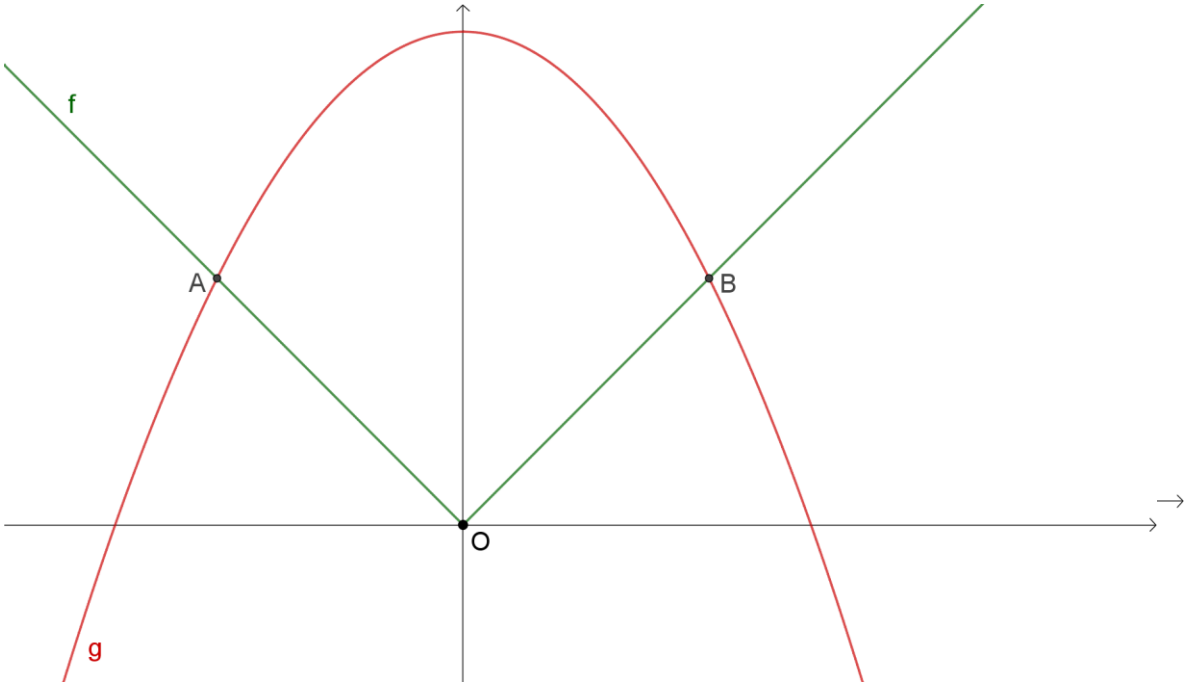
γ) Αν $\mathrm{A}(1,1),\mathrm{B}(-1,-1),\mathrm{M}'(-x,-y)$ να δείξετε ότι $(\mathrm{AB})\le(\mathrm{MM}')$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$ και να εξετάσετε πότε $(\mathrm{AB})=(\mathrm{MM}')$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 14926

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=|x|$ και $g(x)=2-x^2$. Τα A,B είναι τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f,g.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\mathrm{A}(-1,1)$ και $\mathrm{B}(1,1)$,

i.Με βάση το παραπάνω σχήμα, να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι : $f(x)<g(x)$.

(Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε αλγεβρικά την ανίσωση $f(x)<g(x)$ επαληθεύοντας την απάντηση στο ερώτημα βi).

(Μονάδες 9)

Θέμα 14927

ΘΕΜΑ 4

Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560 ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να δείξετε ότι το κόστος για ν καλεσμένους είναι $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$. (1)

(Μονάδες 9)

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i. του αριθμού 1210 στη σχέση (1).

(Μονάδες 5)

ii. της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους.

(Μονάδες 6)

Θέμα 14931

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1+\sqrt{2}$ και $\beta = 1-\sqrt{2}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A} = \alpha^2 - \beta^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\mathrm{B} = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\mathrm{A} = 4\sqrt{2}$ και $\mathrm{B} = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 14932

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν

ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Η εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ είναι αδύνατη, όταν $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$.

ii. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος φυσικός, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}}$=α.

iii. Αν α>0 και Δ<0 η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ αληθεύει για κάθε $x \epsilon R$.

iv. Αν η απόσταση του x από το 0 είναι ίση με 3, τότε x=3 ή x=-3.

v. Η γραφική παράταση μιας συνάρτησης f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 10)

β) Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β , να αποδείξετε ότι

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| .$$

(Μονάδες 15)

Θέμα 14935

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστή (Σ) ή Λανθασμένη (Λ) , γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

i. Για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$.

ii. Αν $\rho>0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $|x|<\rho \Leftrightarrow -\rho<x<\rho$.

iii. Η εξίσωση $x^{\nu}=\alpha$, με ν περιττό φυσικό και $\alpha<0$, έχει λύση την $x=\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

iv. Για οποιαδήποτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M(3, 5)$ ισχύει $f(5)=3$.

v. Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $\beta^2=\alpha\gamma$.

(Μονάδες 10 (5×2))

β) Να αποδείξετε ότι ο νιοστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι:

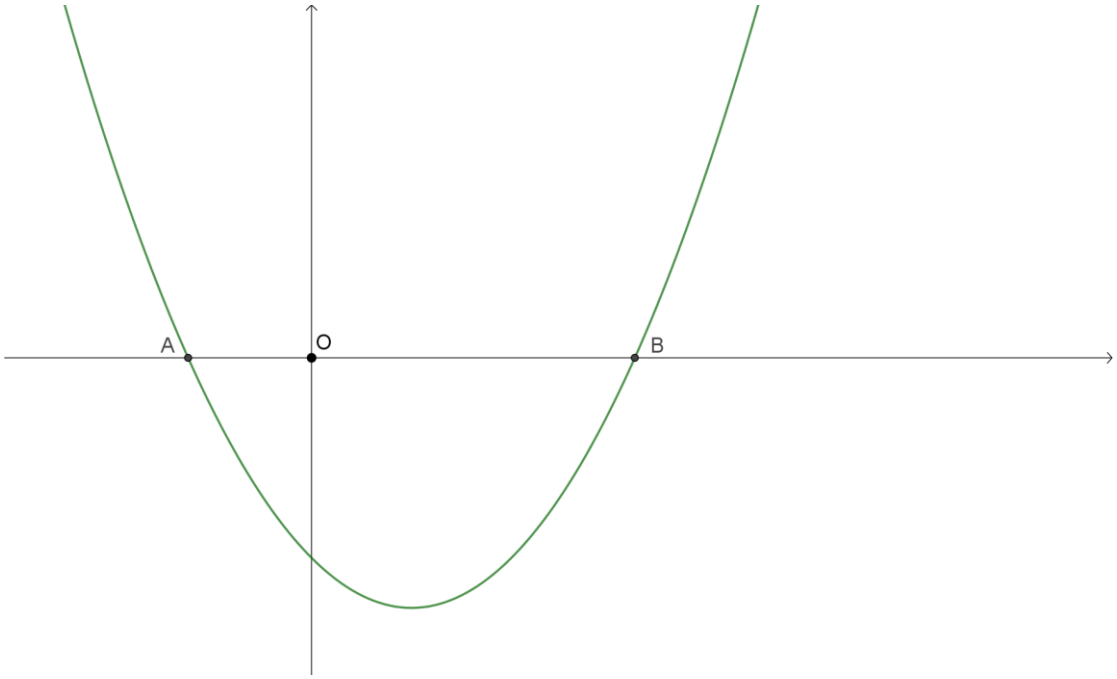
$$\alpha_{\nu}=\alpha_1+(\nu-1)\omega$$

(Μονάδες 15)

Θέμα 14961

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2-x-1$.



Αν $\mathrm{A}(\omega,0)$, $\mathrm{B}(\phi,0)$

α) Να δείξετε ότι :

i. $\omega+\phi=1$.

(Μονάδες 4)

ii. $\omega\cdot\phi=-1$.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(\mathrm{OB})>(\mathrm{OA})$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν ένας θετικός αριθμός β είναι μεγαλύτερος από τον αντίστροφό του και η διαφορά τους ξεπερνάει τη μία μονάδα, να δείξετε ότι $\beta>\phi$.

(Μονάδες 6)

δ) Να δείξετε ότι $\phi<\frac{5}{3}$.

(Μονάδες 5)

Θέμα 14962

ΘΕΜΑ 4

Έστω μία αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά $\omega=3$. Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta=[2,8]$ υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν),

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της (α_ν).

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της (α_ν) που υπάρχουν στο $\Delta=[2,8]$.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha_6=14$,

i. να βρείτε τον α_1.

(Μονάδες 6)

ii. να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (α_ν) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186.

(Δίνεται $\sqrt{4489}=67$)

(Μονάδες 6)

Θέμα 14963

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $|x-4|-|x-2|=2$.

α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί.

(Μονάδες 8)

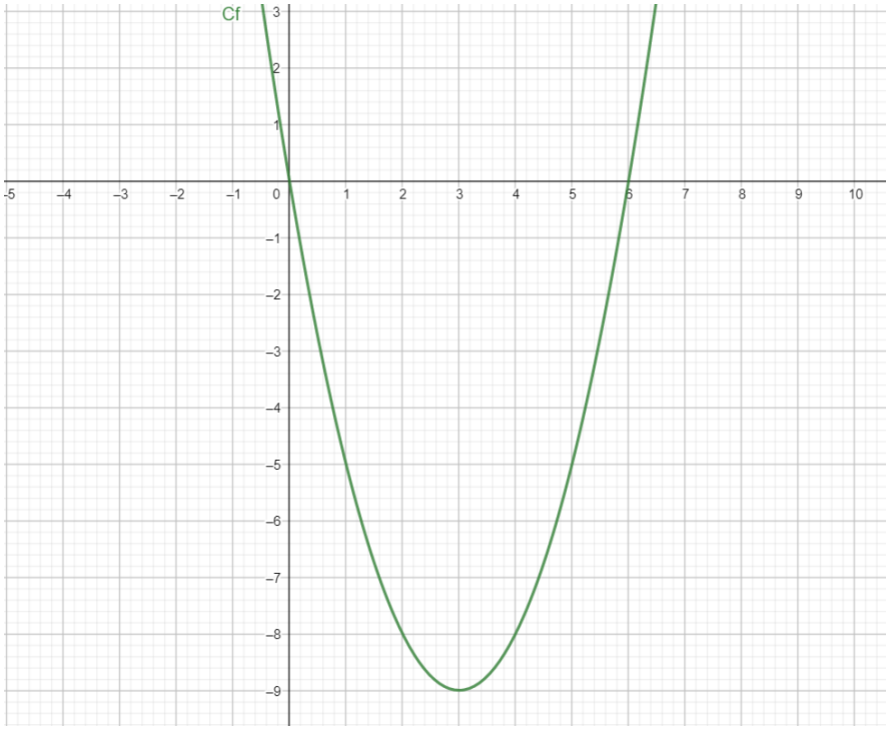
γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x-4|-|x-2|=2$, τότε να δείξετε ότι $x^2-6x+8\geq 0$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 15000

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γραφική παράσταση C_f μιας συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Με τη βοήθεια του σχήματος:

α) Να βρείτε τις τιμές της f για $x = 0,1,3,5$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $f(x) = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $f(x) < 0$.

(Μονάδες 11)

Θέμα 15051

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $\left(2-\sqrt{5}\right)^2=9-4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $\left(2+\sqrt{5}\right)^2$.

(Μονάδες 12)

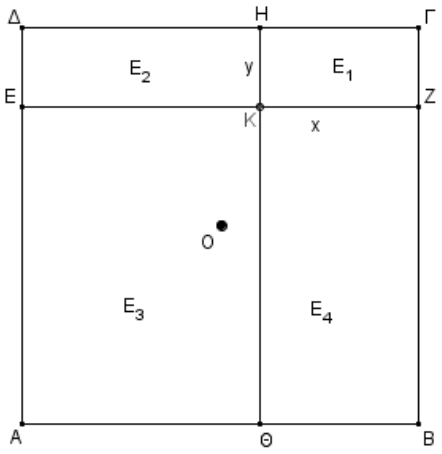
β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9-4\sqrt{5}$ και $9+4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 15052

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:



α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y.

(Μονάδες 8)

β)Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$.

(Μονάδες 6)

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου.

(Μονάδες 5)

Θέμα 15054

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha<0<\beta<\gamma$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A=\alpha(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)\beta$ είναι θετικός.

(Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha+|\alpha-\beta|+|\gamma-\beta|-\gamma=0$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 16153

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 7)

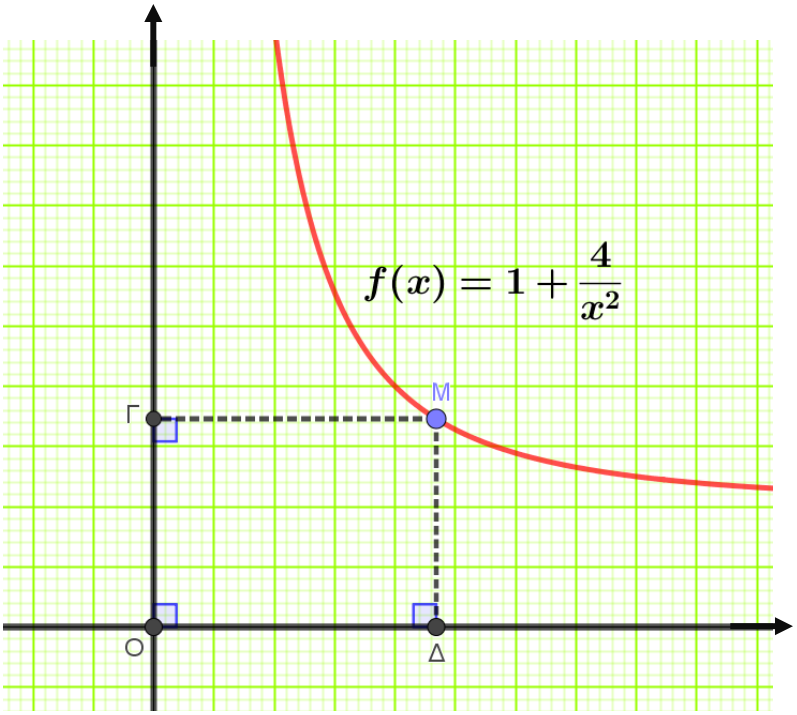
γ) Έστω $\alpha > 0$ η τετμημένη ενός τυχαίου σημείου Μ της γραφικής παράστασης της f. Αν ονομάσουμε E το εμβαδόν του ορθογωνίου $O\Gamma M\Delta$ του σχήματος, να αποδείξετε ότι

i. $E = \alpha + \frac{4}{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

ii. $E \geq 4$.

(Μονάδες 6)



Θέμα 21239

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, -2)$ και διέρχεται από το σημείο $B(-2, -4)$.

α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β.

(Μονάδες 12)

β) Για $\alpha = 1$ και $\beta = -2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η ευθεία βρίσκεται κάτω από τον $x'x$ άξονα.

(Μονάδες 13)

Θέμα 32682

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$.

(Μονάδες 4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$.

(Μονάδες 7)

β)

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18.$$

(Μονάδες 7)

Θέμα 32741

ΘΕΜΑ 4

Στην Α’ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας, η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται τον Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος απαντά με ένα πρόβλημα:

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η Α’ τάξη έχει 90 μαθητές.

(Μονάδες 6)

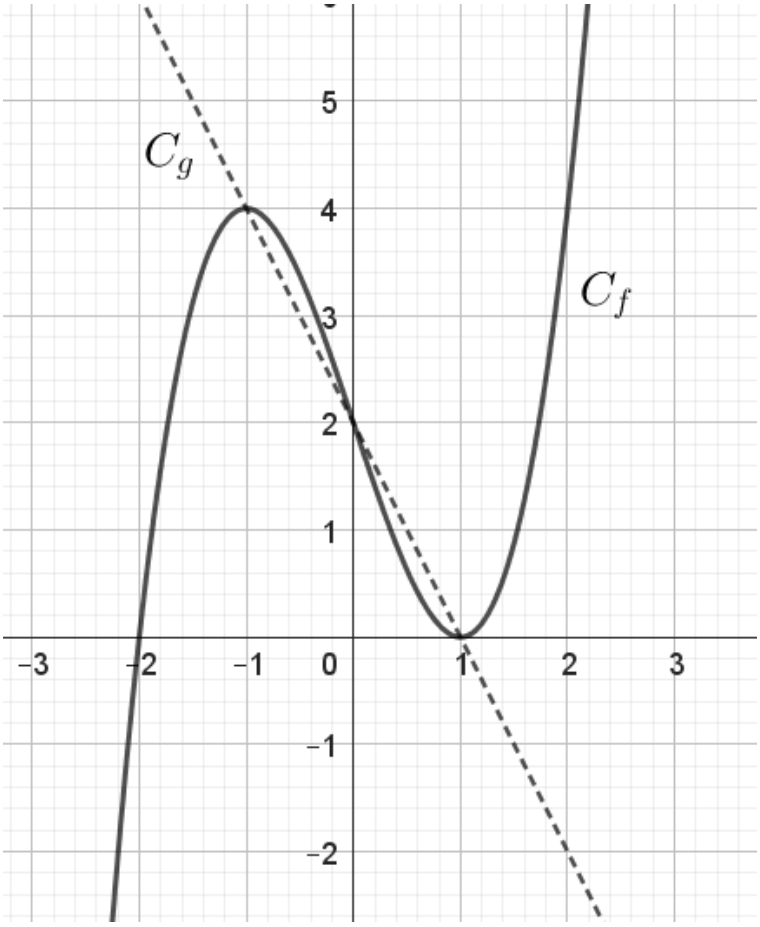
γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες θα δημιουργηθούν.

(Μονάδες 13)

Θέμα 32742

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και της συνάρτησης $g(x) = -2x + 2$.



Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

α) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = -2x + 2$,

(Μονάδες 6)

β) τις τιμές $f(-1)$, $f(0)$ και $f(1)$,

(Μονάδες 6)

γ) τις τιμές του x, για τις οποίες η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g,

(Μονάδες 6)

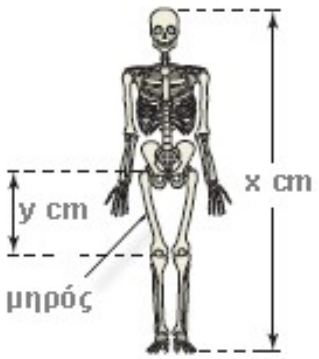
δ) τις τιμές του x, για τις οποίες η παράσταση $A = \sqrt{f(x) + 2x - 2}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 7)

Θέμα 32753

ΘΕΜΑ 4

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του :



Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$

Άνδρας: $y = 0,45x - 31$

α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $38,5$ cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

(Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω, ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους $42,8$ cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

(Μονάδες 9)

Θέμα 33579

ΘΕΜΑ 4

Οι αριθμοί : $x^2+5,\quad x^2+x,\quad 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x.

(Μονάδες 6)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο $4^{ος}$ όρος της προόδου, να βρείτε:

i. Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 5)

ii. Τον πρώτο όρο της προόδου.

(Μονάδες 6)

iii. Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+...+\alpha_{24}$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 33581

ΘΕΜΑ 4

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3 = 8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8 = 23$.

α) Να βρείτε τον 1ο όρο α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 9)

Αν $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 3$,

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S = (\alpha_1 + 1) + (\alpha_2 + 2) + (\alpha_3 + 3) + ... + (\alpha_{31} + 31)$

(Μονάδες 10)

Θέμα 33582

ΘΕΜΑ 4

Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40cm$. Αν $x\,cm$ είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α) $0 < x < 20$.

(Μονάδες 4)

β) Το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $\mathrm{E}(x) = 20x - x^2$.

(Μονάδες 8)

γ) Για το εμβαδόν $\mathrm{E}(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $\mathrm{E}(x) \le 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$.

(Μονάδες 6)

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο $40\,cm$, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς $10\,cm$.

(Μονάδες 7)

Θέμα 33583

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3 = 10$ και $\alpha_{20} = 61$.

α) Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 4$ και η διαφορά είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 33584

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2x+\lambda=0$, με παράμετρο $\lambda<1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1+x_2=2$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1-2|=|x_2+2|$, τότε:

i. Να δείξετε ότι: $x_1-x_2=4$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ.

(Μονάδες 8)

Θέμα 33585

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-\left(\alpha^2-1\right)x-\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta=\left(\alpha^2+1\right)^2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης, ως συνάρτηση του α.

(Μονάδες 10)

Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1=\alpha$ και $\rho_2=-\frac{1}{\alpha}$,

γ) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $\left|\rho_1-\rho_2\right|=2$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 33586

ΘΕΜΑ 4

Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους, κ.α.).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηναίο κόστος $\mathrm{K}(\nu)$ της επιχείρησης, εάν γεμίζει ν τόνερ το μήνα.

(Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει τα μηναία έσοδα $\mathrm{E}(\nu)$ της επιχείρησης από την πώληση ν τόνερ το μήνα.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση

i. να μην έχει ζημιά.

(Μονάδες 7)

ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ.

(Μονάδες 8)

Θέμα 33587

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου:

$$f(2,999) \cdot f(-1,002).$$

(Μονάδες 7)

γ) Αν $-3 < \alpha < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-\alpha^2 + 2|\alpha| + 3$.

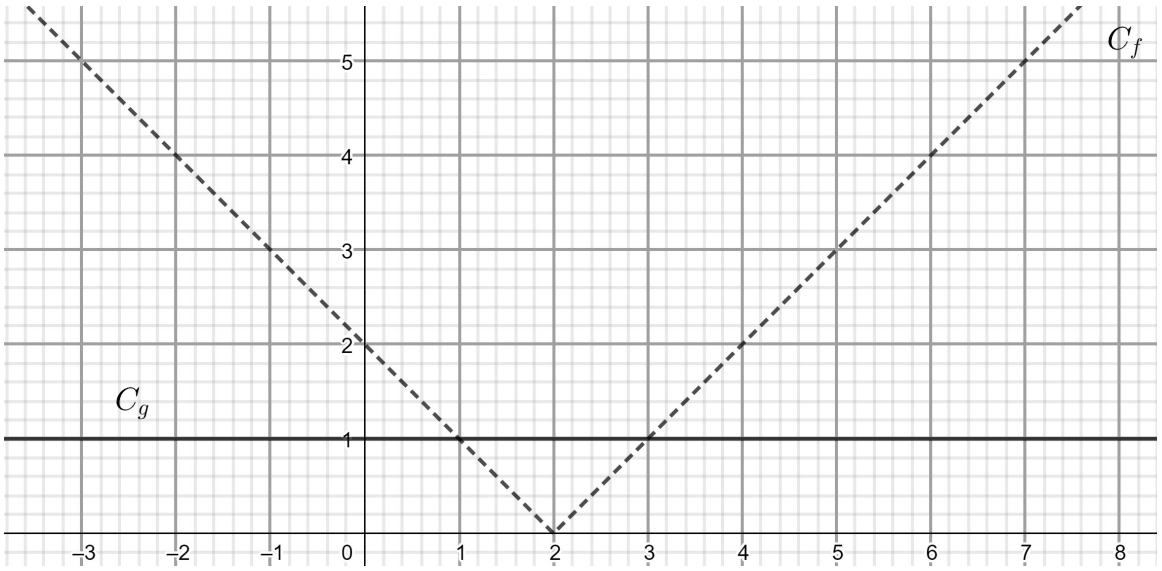
(Μονάδες 9)

Θέμα 33597

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με

$$f(x)=|x-2| \quad \text{και} \quad g(x)=1,\ x\in\mathbb{R}.$$



α) Με τη βοήθεια του παραπάνω σχήματος, να βρείτε

i. τα σημεία τομής των C_f και C_g.

(Μονάδες 5)

ii. τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η C_f είναι κάτω από την C_g.

(Μονάδες 5)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα αi) και αii).

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ η παράσταση $\mathrm{A}=\dfrac{\sqrt{1-f(x)}}{f(x)}$ ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 5)

Θέμα 33698

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$ τότε:

i. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες.

(Μονάδες 6)

ii. Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

(Μονάδες 7)

Θέμα 33701

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)^2 - 4$ και $g(x) = |x-1| + 2$ με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 12)

Θέμα 33711

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 - 2x - 8.$$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, ποιο είναι το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Θέμα 33712

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου.

(Μονάδες 4)

β)

i. Αν $\beta \neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου;

(Μονάδες 7)

ii. Πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$;

(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0.

(Μονάδες 8)

Θέμα 33754

ΘΕΜΑ 4

Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μια ημέρα, η εταιρία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 60 + 0{,}20x$$

Όπου x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y το ποσό της χρέωσης σε ευρώ.

α) Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μια ημέρα, ταξίδεψε $400\ Km$;

(Μονάδες 5)

β) Πόσα χιλιόμετρα ταξίδεψε ένας πελάτης ο οποίος για μια ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ;

(Μονάδες 5)

γ) Μια άλλη εταιρεία, η Β, χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα σύμφωνα με τον τύπο:

$$y = 80 + 0{,}10x$$

όπου, όπως και προηγουμένως, x είναι η απόσταση που διανύθηκε σε km και y είναι το ποσό της χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που σκοπεύουμε να διανύσουμε.

(Μονάδες 10)

δ) Αν

$$f(x) = 60 + 0{,}20x \quad \text{και} \quad g(x) = 0{,}80 + 0{,}10x$$

είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α κα Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g και να εξηγήσετε τι εκφράζει η τιμή κάθε μιας από τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα το ερωτήματος γ).

(Μονάδες 5)

Θέμα 33826

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η εξίσωση:

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0.$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την εξίσωση:

$$x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0 \quad (1) \quad \text{με παραμέτρους } \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε:

i. $\beta^2 - 4\gamma > 0.$

(Μονάδες 3)

ii. Η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

Θέμα 33855

ΘΕΜΑ 4

α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 6)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

ii. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x) - 2} \leq 2$.

(Μονάδες 6)

Θέμα 33858

ΘΕΜΑ 4

Σε αριθμητική πρόοδο (α_v) είναι $\alpha_2 = \kappa^2$ και $\alpha_3 = (\kappa+1)^2$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός.

(Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

i. Να βρείτε την τιμή του κ και να αποδείξετε ότι $\omega = 7$.

(Μονάδες 8)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου.

(Μονάδες 9)

Θέμα 33888

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α και β.

(Μονάδες13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|.$$

(Μονάδες 12)

Θέμα 33889

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2-14x+8=0 \qquad (1)$$

και

$$8x^2-14x+3=0 \qquad (2)$$

(Μονάδες10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \qquad (3) \qquad \text{και} \qquad \gamma x^2+\beta x+\alpha=0 \qquad (4),$$

με $\alpha\cdot\gamma\neq 0$.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\cdot\gamma\neq 0$, τότε

i. $\rho\neq 0$.

(Μονάδες 5)

ii. $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4).

(Μονάδες 10)

Θέμα 33890

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+1\geq\frac{5}{2}x$ (1).

(Μονάδες10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ,λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda-1)(\kappa-1)<0$.

i. Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ,λ.

(Μονάδες 8)

ii. Να δείξετε ότι $|\kappa-\lambda|\geq\frac{3}{2}$.

(Μονάδες 7)

Θέμα 33891

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύουν:

$\alpha_3 = 4,\ \alpha_5 = 16$ και $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τον λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (β_ν), με $\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ είναι επίσης γεωμετρική πρόοδος με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

(Μονάδες 9)

γ) Αν S_{10} είναι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (α_ν) και S'_{10} το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της (β_ν) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$S'_{10} = \frac{1}{2^9} S_{10}.$$

(Μονάδες 8)

Θέμα 33892

ΘΕΜΑ 4

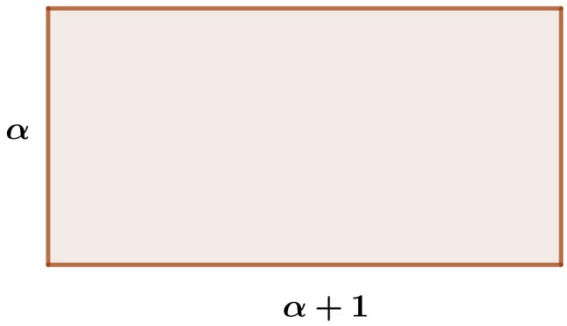
α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-6<0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x-\frac{1}{2}\right|>1$.

(Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο με πλευρές α και $\alpha+1$.



Ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|>1$. Αν για τον εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $\mathrm{E}<6$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

Θέμα 33893

ΘΕΜΑ 4

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

(Μονάδες 7)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x του οποίου η απόσταση από το 4 πάνω στο άξονα των πραγματικών είναι μικρότερη από 2.

i. Να δείξετε ότι $3x-4>0$.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού x από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

(Μονάδες 5)

iii. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

(Μονάδες 8)

Θέμα 33894

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}x-3, & x>2\\ -x+3, & x<2\end{cases}$.

(Μονάδες 7)

γ)

i. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 4)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$.

(Μονάδες 5)

Θέμα 33895

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{4x^2-2(\alpha+3)x+3\alpha}{2x-3}$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=2x-\alpha$, για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,-1)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 5)

Θέμα 33896

ΘΕΜΑ 4

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \leq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $1 < \alpha < 3$.

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο β.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $2\alpha - 3\beta$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $\frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 34145

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_v) με διαφορά ω.

α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15}-\alpha_9}{\alpha_{10}-\alpha_7}=2$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha_{15}-\alpha_9=18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 12)

Θέμα 34146

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $(\alpha+3)x=a^2-9$, με παράμετρο $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Όταν $\alpha=1$.

(Μονάδες 5)

ii. Όταν $\alpha=-3$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

(Μονάδες 12)

Θέμα 34147

ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) με διαφορά ω = 4, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 12)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

Θέμα 34148

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i) $|2x-3| \leq 5$

(Μονάδες 9)

ii) $|2x-3| \geq 1$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

Θέμα 34149

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1).

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| < 2$ (2).

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις (1) και (2).

(Μονάδες 7)

Θέμα 34150

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β τέτοιοι, ώστε:

$$\alpha + \beta = 12 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 272 .$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha \cdot \beta = -64 .$$

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β.

(Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α και β.

(Μονάδες 7)

Θέμα 34152

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $\mathrm{A}=\sqrt{(x-2)^2}$ και $\mathrm{B}=\sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A;

(Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B;

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $\mathrm{A}=\mathrm{B}$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 34153

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί x+6, 5x+2, 11x-6 είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω.

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι ω=4.

(Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων.

(Μονάδες 13)

Θέμα 34154

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί:

$$\mathrm{A}=\frac{1}{3-\sqrt{7}},\ \mathrm{B}=\frac{1}{3+\sqrt{7}}.$$

α) Να δείξετε ότι:

$$A+B=3 \text{ και } A\cdot B=\frac{1}{2}.$$

(Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B.

(Μονάδες 13)

Θέμα 34155

ΘΕΜΑ 3

Αν είναι $A=\sqrt[3]{5}$, $B=\sqrt{3}$, $\Gamma=\sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}\cdot\Gamma=\sqrt{15}$.

(Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B.

(Μονάδες 10)

Θέμα 34156

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_v), για την οποία ισχύει $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 27$.

α) Να δείξετε ότι ο λόγος της προόδου είναι λ = 3.

(Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της προόδου είναι 200, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1.

(Μονάδες 15)

Θέμα 34157

ΘΕΜΑ 2

Αν είναι $\mathrm{A}=2-\sqrt{3}$, $\mathrm{B}=2+\sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A\cdot B=1$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = \mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 34158

ΘΕΜΑ 2

Σε αριθμητική πρόοδο (αν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (αν) πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$).

(Μονάδες 13)

Θέμα 34159

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 34161

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$.

(Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+3=0$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 34162

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|2x-5| \leq 3$. (1)

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2x^2 - x - 1 \geq 0$. (2)

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2).

(Μονάδες 9)

Θέμα 34180

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι αριθμοί $2, x, 8$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε οι αριθμοί $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Ποια είναι η διαφορά ω αυτής της προόδου;

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τον αριθμό x, ώστε οι $2, x, 8$, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου. Ποιος είναι ο λόγος λ αυτής της προόδου;

(Μονάδες 7)

γ) Αν (α_ν) είναι η αριθμητική πρόοδος $2, 5, 8, 11, \ldots$ και (β_ν) η γεωμετρική πρόοδος $2, 4, 8, 16, \ldots$, τότε να βρείτε:

i. Το άθροισμα S_ν των ν πρώτων όρων της (α_ν).

(Μονάδες 5)

ii. Την τιμή του ν, ώστε για το άθροισμα S_ν του γi) ερωτήματος να ισχύει:

$$2 \cdot (S_\nu + 24) = \beta_7 .$$

(Μονάδες 8)

Θέμα 34181

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο μήκους α, πλάτους β και εμβαδού E. Οι αριθμοί $\alpha, \mathrm{E}, \beta$, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του εμβαδού E.

(Μονάδες 10)

β) Αν $\mathrm{E}=1$ και $\alpha+\beta=10$,

i. να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες α και β.

(Μονάδες 5)

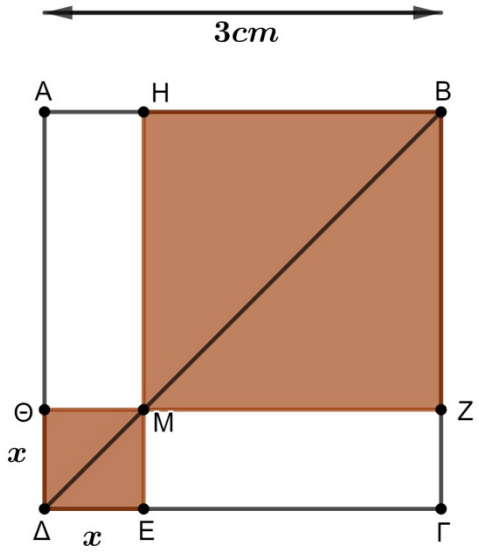
ii. να βρείτε τις διαστάσεις α και β του ορθογωνίου.

(Μονάδες 10)

Θέμα 34182

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς $\text{ΑΒ}=3cm$ και τυχαίο σημείο Μ που κινείται στη διαγώνιο ΒΔ εσωτερικά (δηλαδή το Μ δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).



α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν Ε των σκιασμένων τετραγώνων ΗΒΖΜ και ΘΜΕΔ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\text{Ε}(x)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι $\text{Ε}(x)=2x^2-6x+9$, να αποδείξετε ότι $\text{Ε}(x)\geq\frac{9}{2}$, για κάθε $x\in(0,3)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στη ΒΔ το εμβαδόν $\text{Ε}(x)$ γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Θέμα 34183

ΘΕΜΑ 4

Σε μια πόλη της Ευρώπης μια εταιρεία ταξί με το όνομα «RED» χρεώνει τον πελάτη 1 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και $0,6$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Μια άλλη εταιρεία ταξί με το όνομα «YELLOW» χρεώνει τον πελάτη 2 ευρώ με την είσοδο στο ταξί και $0,4$ ευρώ για κάθε χιλιόμετρο που διανύει. Οι παραπάνω τιμές ισχύουν για αποστάσεις μικρότερες από 15 χιλιόμετρα.

α)

i. Αν $f(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «RED» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

$x\ (km)$	0	2	8
$f(x)$ (ευρώ)			

(Μονάδες 3)

ii. Αν $g(x)$ είναι το ποσό (σε ευρώ) που χρεώνει η εταιρεία «YELLOW» για μια διαδρομή x χιλιομέτρων, να μεταφέρετε στην κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

$x\ (km)$			
$g(x)$ (ευρώ)	2	$3,2$	$4,8$

(Μονάδες 3)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των f, g και να βρείτε για ποιες αποστάσεις η επιλογή της εταιρείας «RED» είναι πιο οικονομική, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

δ) Αν δυο πελάτες A και B μετακινηθούν με την εταιρεία «RED» και ο πελάτης A διανύσει 3 χιλιόμετρα περισσότερα από τον B, να βρείτε πόσα περισσότερα χρήματα θα πληρώσει ο A σε σχέση με τον B.

(Μονάδες 3)

Θέμα 34184

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) με κάθετες πλευρές $AB=x$ και $A\Gamma=y$, έτσι ώστε $x+y=10$.

α) Να εκφράσετε το εμβαδόν E του τριγώνου $AB\Gamma$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E(x)=\frac{1}{2}\left(-x^2+10x\right)$, να δείξετε ότι $E\left(x\right)\le\frac{25}{2}$, για κάθε $x\in\left(0,10\right)$.

(Μονάδες9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $x\in\left(0,10\right)$ ώστε το εμβαδόν $E(x)$ να γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$. Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο $AB\Gamma$;

(Μονάδες 7)

Θέμα 34185

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2-5x-6<0$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $\mathrm{K}=\left(-\frac{46}{47}\right)^2+5\cdot\frac{46}{47}-6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha\in(-6,6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Θέμα 34186

ΘΕΜΑ 4

Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0$, με $\lambda\in(0,2)$.

α) Να βρείτε

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $E\leq 1$, για κάθε $\lambda\in(0,2)$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in(0,2)$ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

Θέμα 34309

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = x + \alpha \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } \alpha \in \mathbb{R}.$$

α) Για $\alpha = 1$, να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του α, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε δύο σημεία.

(Μονάδες 10)

γ) Για $\alpha > 1$, να εξετάσετε αν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g είναι ομόσημες ή ετερόσημες.

(Μονάδες 10)

Θέμα 34310

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης ως συνάρτηση του λ.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

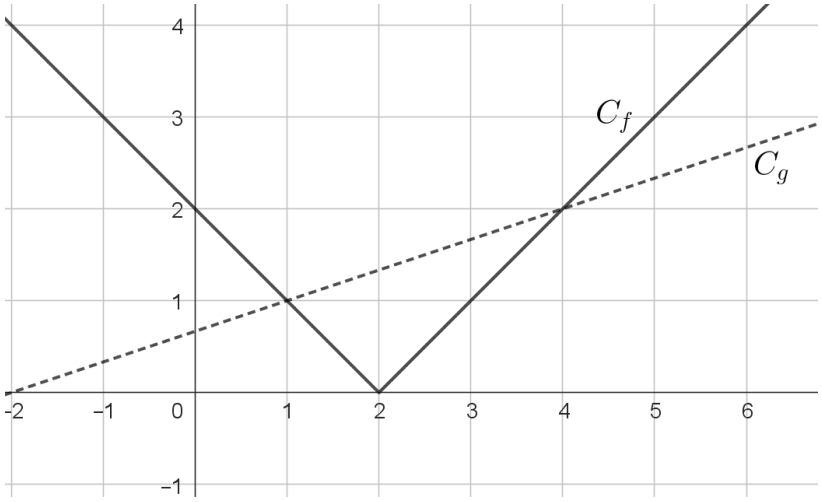
(Μονάδες 10)

Θέμα 34312

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, με:

$$f(x) = |x-2| \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \qquad \text{με } x \in \mathbb{R}.$$



α) Με βάση το σχήμα, να εκτιμήσετε την τιμή των συντεταγμένων των σημείων τομής γραφικών παραστάσεων C_f και C_g.

(Μονάδες 6)

β) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο ερώτημα α).

(Μονάδες 8)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f βρίσκεται πάνω από τη C_g.

(Μονάδες 6)

δ) Με τη βοήθεια του ερωτήματος γ), να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς η παράσταση:

$$K = \sqrt{3|2-x| - (x+2)}.$$

(Μονάδες 5)

Θέμα 34317

ΘΕΜΑ 4

Το ποσό που θα πληρώσει (σε ευρώ) ένας κάτοικος μιας πόλης A ο οποίος καταναλώνει x κυβικά μέτρα νερού σε ένα χρόνο, δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}0,5x+12, & \text{αν } 0\le x\le 30\\ 0,7x+6, & \text{αν } x>30\end{cases}.$$

α) Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει κάποιος αν:

i. έλλειπε από το σπίτι του και δεν έχει καταναλώσει καθόλου νερό,

(Μονάδες 2)

ii. έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού,

(Μονάδες 3)

iii. έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 5)

β) Σε μια άλλη πόλη B, το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί σε κατανάλωση x κυβικών μέτρων δίνεται από τον τύπο:

$$g(x)=12+0,6x, \text{ για } x\ge 0.$$

Ένας κάτοικος της πόλης A και ένας κάτοικος της πόλης B κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά μέτρα νερού. Αν ο κάτοικος της πόλης A πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης B, να αποδείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

(Μονάδες 15)

Θέμα 34319

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + \kappa x - 4$, με παράμετρο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του κ, το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

Θέμα 34322

ΘΕΜΑ 4

Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που προκύπτει από τη σχέση:

$$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \qquad (1)$$

α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός x είναι ο -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ;

(Μονάδες 4)

β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ο 20, ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός x;

(Μονάδες 6)

γ)

i. Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:

$$4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0.$$

(Μονάδες 2)

ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

(Μονάδες 6)

iii. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός λ.

(Μονάδες 7)

Θέμα 34323

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1+x_2}{2} < x_2$,

(Μονάδες 4)

ii. να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου και να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1).$$

(Μονάδες 5)

Θέμα 34325

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 34327

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-3x-4=0$ (1)

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α,β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$.

i. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

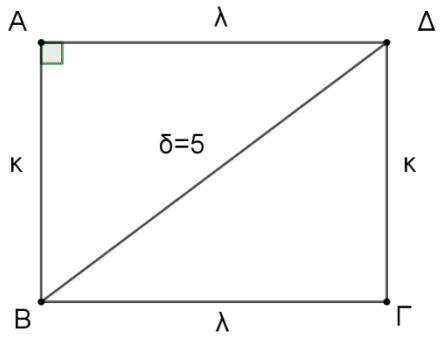
(Μονάδες 7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi = 14\ cm$ και μια διαγώνιος $\delta = 5\ cm$.



α)

i. Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa + \lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν *E* του ορθογωνίου ισχύει $E = 12\ cm^2$.

(Μονάδες 7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$.

(Μονάδες 7)

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 14\ cm$ πρέπει να έχει εμβαδόν $\mathrm{E} \leq \frac{49}{4}$.

(Μονάδες 7)

Θέμα 34436

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{5+\sqrt{5}}, B=\frac{1}{5-\sqrt{5}}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) $A+B=\frac{1}{2}$

(Μονάδες 8)

i) $A\cdot B=\frac{1}{20}$

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Μονάδες 9)

Θέμα 34446

ΘΕΜΑ 2

Η απόσταση y (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από x λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y=35+0,8x$$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)

Θέμα 34544

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$: (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta=(2\lambda-4)^2$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x=2$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 9)

Θέμα 34746

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4) = 0, \ (1)$ με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

Θέμα 34871

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε οι αριθμοί $x+2,\ x+1,\ 3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=-1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 12)

Θέμα 34872

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $\kappa x+3=2x$, με παράμερο $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\kappa=1$ και για $\kappa=3$.

(Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $\kappa=2$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 34874

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2-5x+2=0$ (1).

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 12)

Θέμα 34877

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-2x-3=0$ (1).

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 12)

Θέμα 34910

ΘΕΜΑ 3

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 4x + 3 < 0$ (1).

(Μονάδες 13)

β) Αν η (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $1 < x < 3$ και οι αριθμοί α, β είναι λύσεις της ανίσωσης (1), να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι επίσης λύση της ανίσωσης (1).

(Μονάδες 12)

Θέμα 34919

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$.

(Μονάδες 13)

β) Αν $3 < x < 7$, να δείξετε ότι η παράσταση

$$A = |x^2 - 10x + 21| + x^2 - 10x + 22$$

είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 12)

Θέμα 34920

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $3x^2 + 6x - 12$ (1). Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1),

α) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων $x_1 + x_2$ και $x_1 x_2$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $4x_1$, $4x_2$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 35030

ΘΕΜΑ 2

α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$$

(Μονάδες 15)

Θέμα 35033

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x - 4|$ και $B = |x - 3|$.

α) Αν $2 < x < 3$, να δείξετε ότι $A = 2x - 4$.

(Μονάδες 7)

β) Αν $2 < x < 3$, να δείξετε ότι $A + B = x - 1$.

(Μονάδες 9)

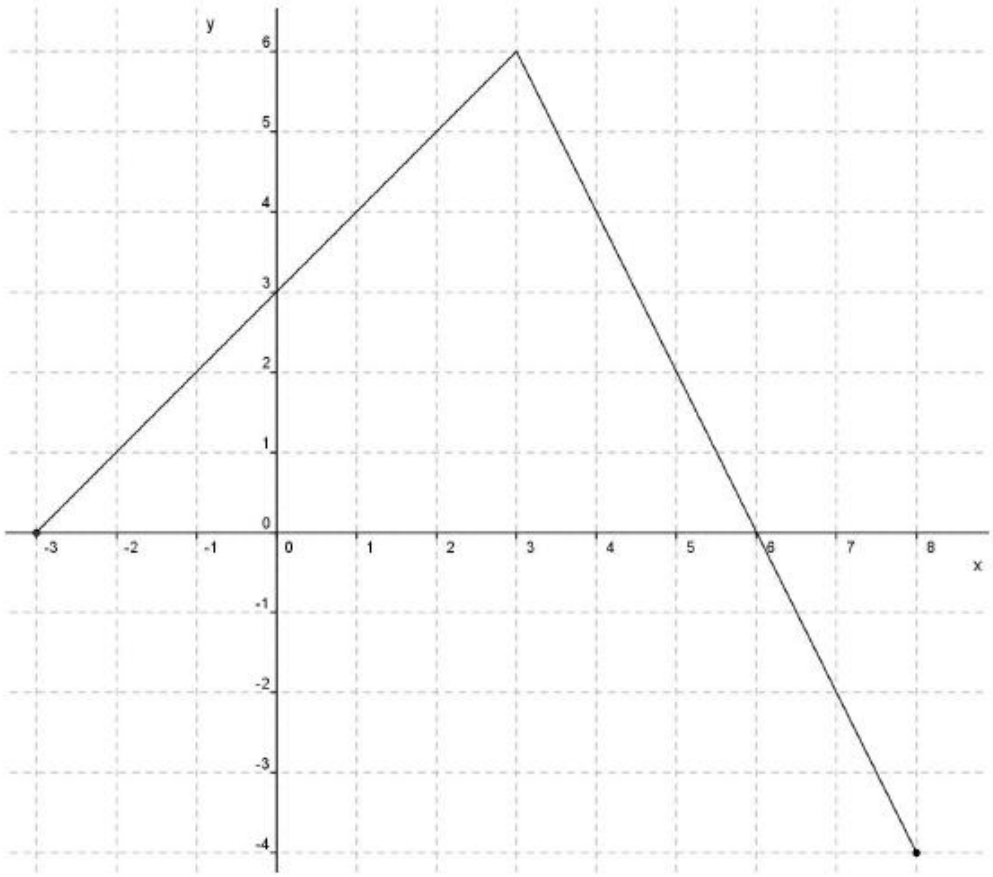
γ) Υπάρχει $x \in (2, 3)$ ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Θέμα 35034

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

x	-3	-1	0	3		
y					-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

Θέμα 35035

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του α) ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Θέμα 35037

ΘΕΜΑ 3

Οι αριθμοί $\kappa - 2,\ 2\kappa$ και $7\kappa + 4,\ \kappa \in \boldsymbol{N}$ είναι με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν).

α) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 4$ και να βρείτε το λόγο λ της προόδου.

(Μονάδες 12)

β)

i. Να εκφράσετε τον 2ο όρο, τον 5ο και τον 4ο όρο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου ως συνάρτηση του α_1.

(Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha_2 + \alpha_5 = 4(\alpha_1 + \alpha_4)$.

(Μονάδες 7)

Θέμα 35038

ΘΕΜΑ 2

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha \cdot \beta = 4 \text{ και } \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha + \beta = 5$.

(Μονάδες 10)

Β) Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

Θέμα 35040

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι: $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

(Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Θέμα 35041

ΘΕΜΑ 2

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$

α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

Θέμα 35042

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε, για ποιες τιμές του x, οι αριθμοί $x+4,\ 2-x,\ 6-x$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Αν $x=5$ και ο $6-x$ είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, να βρείτε:

i. το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 6)

ii. τον πρώτο όρο α_1 της προόδου.

(Μονάδες 6)

Θέμα 35043

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2|<3$

α) Να αποδείξετε ότι: $-1<x<5$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|x+1|+|x-5|}{3}$

(Μονάδες 13)

Θέμα 35044

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y, για τους οποίους ισχύει: $|y-2|<1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1,3)$

(Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K=\frac{|y-1|+|y-3|}{2}$

(Μονάδες 13)

Θέμα 35046

ΘΕΜΑ 2

Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιός όρος της προόδου είναι ίσος με 152.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2+10x=12$.

(Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x\geq 2$, $A=3x-4$.

ii. για κάθε $x<2$, $A=8-3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x\geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4.$$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστος όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, όπου α,β πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(1,6)$, $\mathrm{B}(-1,4)$, να βρείτε τις τιμές των α, β.

(Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha=1$ και $\beta=5$, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 35205

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x ώστε οι αριθμοί: x, $2x+1$, $5x+4$, με την σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i. $x=1$

ii. $x=-1$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| \geq 5$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των α) και β).

(Μονάδες 8)

Θέμα 35298

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}2x+4, x<0\\ x-1, x\geq 0\end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-1)=f(3)$.

(Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$, ώστε: $f(x)=0$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 35299

ΘΕΜΑ 2

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς.

(Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά;

(Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο;

(Μονάδες 8)

Θέμα 35375

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{K}=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K.

(Μονάδες 8)

Θέμα 35385

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta,\ g(x) = x + \beta$, όπου $x \in R$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3 - \frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξτε ότι $\beta = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\beta = -1$

(i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

(Μονάδες 5)

(ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

(Μονάδες 7)

(iii) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y-3|<1$.

(Μονάδες 15)

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι $3<x+y<7$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2

Οι αριθμοί $\mathrm{A}=1$, $\mathrm{B}=x+4$, $\Gamma=x+8$, είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν).

α) Να βρείτε την τιμή του x.

(Μονάδες 10)

β) Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν).

i. να υπολογίσετε τη διαφορά ω.

(Μονάδες 7)

ii. να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 8)

Θέμα 35409

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο $x^2-\lambda x+1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\lambda^2-4$.

(Μονάδες 05)

β) Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g που είναι ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με

$f(x)=\lambda x-\lambda+2$ και $g(x)=x^2-\lambda+3$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

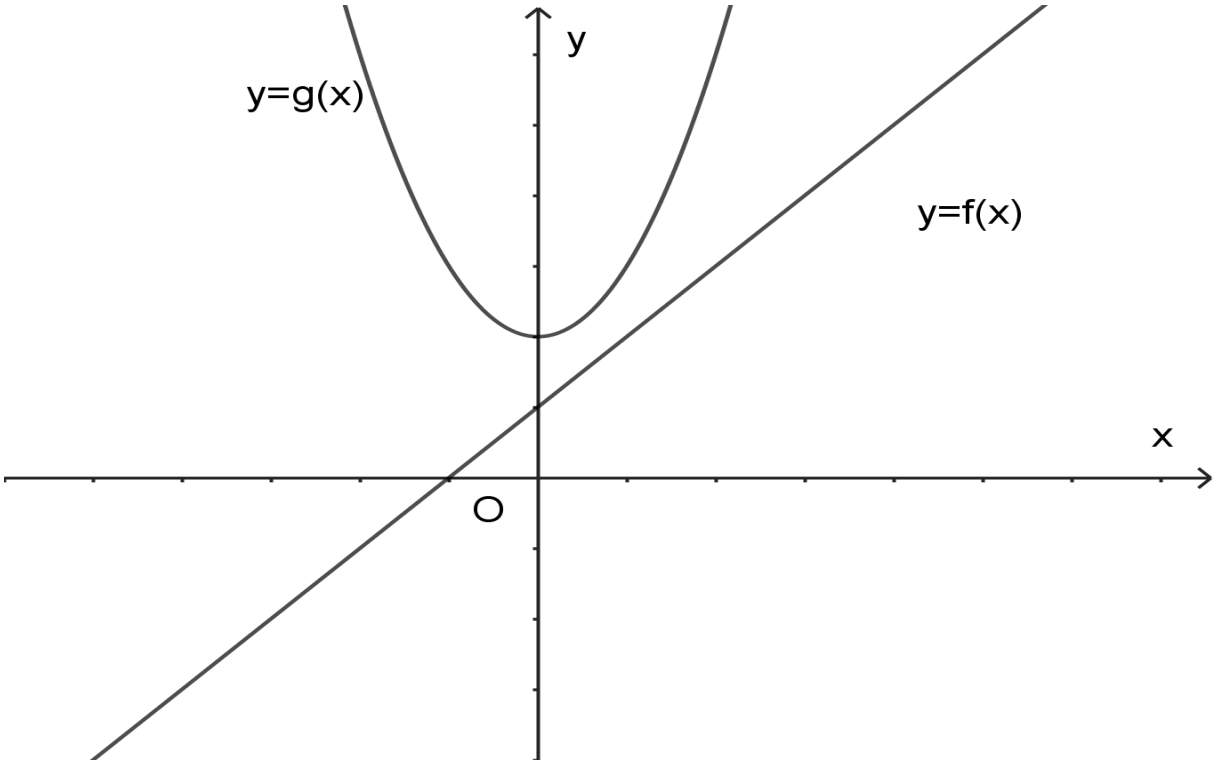
i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση από την οποία μπορούμε να βρούμε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$.

(Μονάδες 05)

ii. Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ.

Με δεδομένο ότι $\lambda\in\{1,2,4\}$, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ σε καθένα από τα σχήματα, δικαιολογώντας την απάντηση σας.

(Μονάδες 15)



Σχήμα 1

Θέμα 35410

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-2\lambda x+4\lambda+5$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=4\lambda^2-16\lambda-20$.

(Μονάδες 05)

β) Θεωρούμε την συνάρτηση f, που είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τύπο

$f(x)=x^2-2\lambda x+4\lambda+5$.

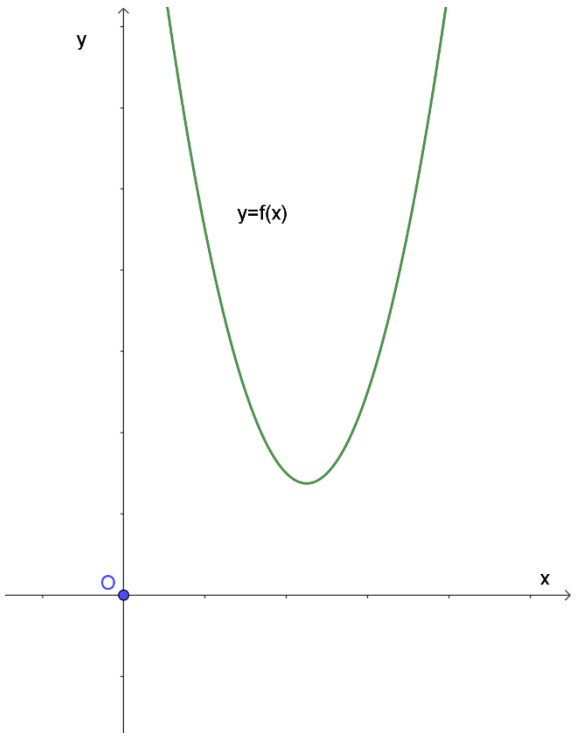
Στο καθένα από τα επόμενα σχήματα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου λ.

i. Για τα δύο πρώτα σχήματα δίνεται ότι η παράμετρος $\lambda\in\{-2,4\}$. Να βρείτε σε ποια τιμή του λ αντιστοιχεί το καθένα από τα σχήματα αυτά, δικαιολογώντας την απάντηση σας.

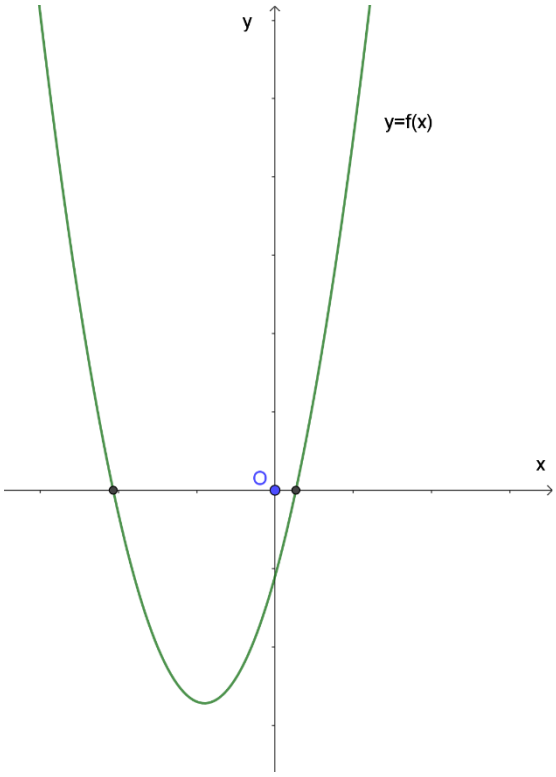
(Μονάδες 10)

ii. Για το σχήμα 3 να βρείτε τις δυνατές τιμές που μπορεί να πάρει η παράμετρος $\lambda\in\mathbb{R}$, δικαιολογώντας την απάντηση σας.

(Μονάδες 10)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

ΘΕΜΑ 2

α) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

(Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4-x, x, 2$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4-x, x, 2$ να είναι διαδοχικοί αριθμοί αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 2

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς τις απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\frac{1}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $\mathrm{M}\left(\alpha,\frac{1}{8}\right)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση: $\mathrm{A}=|x-1|-|x-2|$.

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $\mathrm{A}=2x-3$.

(Μονάδες 13)

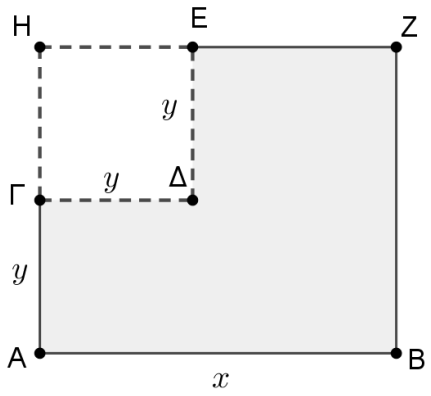
β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 2

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.



(Μονάδες 10)

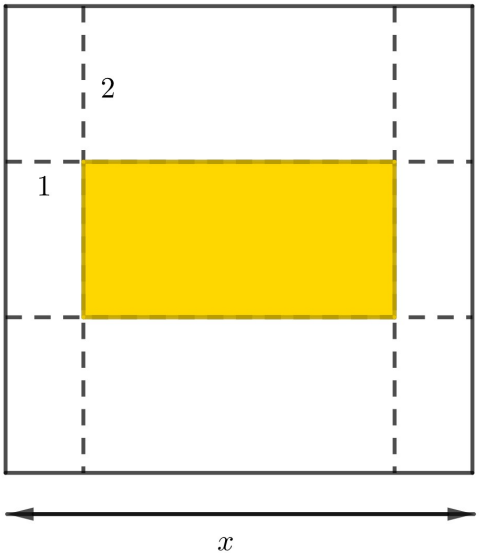
β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

(Μονάδες 15)

Θέμα 35724

ΘΕΜΑ 4

Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $x\,cm$ $(5 \le x \le 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων (με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα) περιβάλλεται από περιθώρια $2\,cm$ στο πάνω και στο κάτω μέρος της και $1\,cm$ δεξιά και αριστερά.



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$\mathrm{E}(x) = (x-2)(x-4),\ 5 \le x \le 10\ .$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $35\,cm^2$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\,cm^2$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36649

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν οργανισμό, αρχικά υπάρχουν 204800 βακτήρια. Μετά από 1 ώρα υπάρχουν 102400 βακτήρια, μετά από 2 ώρες υπάρχουν 51200 βακτήρια , και γενικά ο αριθμός των βακτηρίων υποδιπλασιάζεται κάθε μια ώρα.

α) Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν μετά από 6 ώρες;

(Μονάδες 6)

β) Τη χρονική στιγμή όμως που τα βακτήρια ήταν 3200, ο οργανισμός παρουσίασε ξαφνική επιδείνωση. Ο αριθμός των βακτηρίων άρχισε πάλι να αυξάνεται ώστε κάθε μια ώρα να τριπλασιάζεται. Το φαινόμενο αυτό διήρκεσε για 5 ώρες. Συμβολίζουμε με β_v το πλήθος των βακτηρίων ν ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης ($v \leq 5$).

i. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_v) είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της.

(Μονάδες 6)

ii. Να εκφράσετε το πλήθος β_v των βακτηρίων συναρτήσει του ν.

(Μονάδες 6)

iii. Πόσα βακτήρια θα υπάρχουν στον οργανισμό 3 ώρες μετά από την στιγμή της επιδείνωσης;

(Μονάδες 7)

Θέμα 36650

ΘΕΜΑ 4

Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των $21€$ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις.

Θέλοντας να αυξήσει την πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει $3€$ και κάθε επόμενος επιβάτης να πληρώνει $0,5€$ περισσότερα από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε πόσο θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης.

(Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $\nu \leq 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.

(Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο $51^{ος}$ επιβάτης.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των $21€$ ανά εισιτήριο.

(Δίνεται: $\sqrt{10201} = 101$) (Μονάδες 8)

Θέμα 36651

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4\lambda+5=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda=-2$ και όταν $\lambda=3$.

(Μονάδες 8)

β) i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda=5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα.

(Μονάδες 3)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.

(Μονάδες 6)

γ) Αν ισχύει $|\lambda^2-4\lambda-5|=4\lambda-\lambda^2+5, \lambda\in\mathbb{R}-\{-1, 5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 8)

Θέμα 36652

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα σημείο του ημιάξονα Ox.

(Μονάδες 7)

Θέμα 36653

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ της οποίας οι τρεις πρώτοι όροι είναι:

$$\alpha_1 = x,\ \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4,\ \alpha_3 = x^2 - 2$$, με x ακέραιο.

α) Να αποδείξετε ότι $x = 3$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να είναι ίσος με 2014 .

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{15}$.

(Μονάδες 7)

Θέμα 36654

ΘΕΜΑ 4

Δυο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν πάνω σε μπλουζάκια και ίδρυσαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Σε διάστημα ενός μηνός τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση $K(x)=12,5x+120$ και τα έσοδα από την πώληση τους (σε ευρώ), από τη συνάρτηση $E(x)=15,5x$.

α) Αν η επιχείρηση κάποιο μήνα δεν κατασκευάσει μπλουζάκια, έχει έξοδα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

β) Τι εκφράζει ο αριθμός $12,5$ και τι ο αριθμός $15,5$ στο πλαίσιο του προβλήματος;

(Μονάδες 4)

γ) Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην «μπαίνει μέσα» η επιχείρηση).

(Μονάδες 6)

δ) Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Θέμα 36655

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β.

(Μονάδες 8)

Θέμα 36657

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda), x\in\mathbb{R}$ και $\lambda\neq 0$, παράμετρος.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους C_f, C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda\neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε να ισχύει $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$.

(Μονάδες 9)

Θέμα 36658

ΘΕΜΑ 4

Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε cm) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$.

α) Μετά πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος;

(Μονάδες 8)

β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος $y = 175m$;

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m.

(Μονάδες 9)

Θέμα 36659

ΘΕΜΑ 4

Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει, κολυμπώντας, να κάψει 360 θερμίδες.

α) Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;

(Μονάδες 5)

β) Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

i. Αν x είναι ο χρόνος (σε λεπτά) που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι: $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερωτήματος β (i), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

(Μονάδες 4)

γ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερωτήματος (β), να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 9)

Θέμα 36660

ΘΕΜΑ 4

Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη.

α) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της;

(Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η $20^{η}$ κυψέλη;

(Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη συλλέγει το μέλι, από μια κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει στην αποθήκη Α.

i. Ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την $3^{η}$ κυψέλη;

(Μονάδες 6)

ii. Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες;

(Μονάδες 7)

Θέμα 36661

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι $2^{ου}$ βαθμού.

(Μονάδες 6)

Θέμα 36662

ΘΕΜΑ 4

Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη.

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου.

(Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την $7^{η}$ μέχρι και την $14^{η}$ σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36663

ΘΕΜΑ 4

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm

α) Να βρείτε ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

(Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i. Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

(Μονάδες 12)

ii. Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

(Μονάδες 7)

Θέμα 36668

ΘΕΜΑ 4

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^oC) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^oF), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^oC) σε βαθμούς Κέλβιν (^oK), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^oC) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (^oK) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (^oF) είναι η

$$K = \frac{F - 32}{1{,}8} + 273$$

(Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278 ^oK μέχρι 283 ^oK. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^oF.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36669

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \le |x| \le 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36670

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1)$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36671

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x,5)\le 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

(Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

(Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

(Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:

$$|x+4|+|x-14|=18$$

(Μονάδες 5)

Θέμα 36672

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία Α , Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς -2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2<x<7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x+2|$

(Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$

(Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος: $|x+2|+|x-7|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\mathrm{A}=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

(Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

(Μονάδες 7)

Θέμα 36673

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν άξονα τα σημεία Α , Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$, τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

Θέμα 36674

ΘΕΜΑ 4

Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς.

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών.

(Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος.

(Μονάδες 7)

Θέμα 36675

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:

i) Να βρείτε το $S=x_1+x_2$.

ii) Να βρείτε το $P=x_1\cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ .

(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii) να βρείτε τον αριθμό λ.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36676

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x-\alpha+2$ και $g(x)=x^2-\alpha+3$ με $\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(1,2)$ για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού α .

(Μονάδες 7)

β) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται σε σημείο με τετμημένη 1, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$.

(Μονάδες 4)

ii) Για $\alpha=2$ υπάρχει άλλο σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι το πλήθος των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των f και g είναι ίδιο με το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2-\alpha x+1=0$ και στη συνέχεια ότι για $\alpha=3$, $\alpha=-2$, $\alpha=1$ έχουν αντίστοιχα δύο, ένα, κανένα σημεία τομής.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36677

ΘΕΜΑ 4

Μια οικογένεια, προκειμένου να χρηματοδοτήσει τις σπουδές του παιδιού της, έχει να επιλέξει μεταξύ δυο προγραμμάτων που της προτείνονται:

Για το πρόγραμμα Α πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 1 ευρώ, το 2ο μήνα 2 ευρώ, τον 3ο μήνα 4 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει, πρέπει να καταθέτει ποσό διπλάσιο από αυτό που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

Για το πρόγραμμα Β πρέπει να καταθέσει τον 1ο μήνα 100 ευρώ, το 2ο μήνα 110 ευρώ, τον 3ο μήνα 120 ευρώ και γενικά, κάθε μήνα που περνάει πρέπει να καταθέτει ποσό κατά 10 ευρώ μεγαλύτερο από εκείνο που κατέθεσε τον προηγούμενο μήνα.

α) Να βρείτε

i) το ποσό α_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον ν^{ο} (νιοστό) μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

(Μονάδες 4)

ii) το ποσό β_ν που πρέπει να κατατεθεί στο λογαριασμό τον ν^{ο} μήνα σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

(Μονάδες 4)

iii) το ποσό A_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Α.

(Μονάδες 5)

iv) το ποσό B_ν που θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά από ν μήνες σύμφωνα με το πρόγραμμα Β.

(Μονάδες 5)

β)

i) Τι ποσό θα υπάρχει στο λογαριασμό μετά τους πρώτους 6 μήνες, σύμφωνα με κάθε πρόγραμμα;

(Μονάδες 3)

ii) Αν κάθε πρόγραμμα ολοκληρώνεται σε 12 μήνες, με ποιο από τα δύο προγράμματα το συνολικό ποσό που θα συγκεντρωθεί θα είναι μεγαλύτερο;

(Μονάδες 4)

Θέμα 36678

ΘΕΜΑ 4

α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς:

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α).

(Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1+\alpha} < 1+\sqrt{\alpha}$.

(Μονάδες 7)

Θέμα 36679

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-5|x|+6}{|x|-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in \mathrm{A}$ ισχύει $f(x)=|x|-2$.

(Μονάδες 9)

γ) Για $x\in \mathrm{A}$, να λύσετε την εξίσωση $(f(x)+2)^2-4f(x)-5=0$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36680

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2-4x+\alpha \text{ και } g(x)=\alpha x-5, \text{ με } \alpha\in\mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.

(Μονάδες 7)

β) Για $\alpha=1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$.

(Μονάδες 5 + 5 = 10)

Θέμα 36681

ΘΕΜΑ 4

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με

$$f(x) = (\lambda+1)x^2 - (\lambda+1)x + 2,\ x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$.

(Μονάδες 3)

β) Για $\lambda = -1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\mathrm{B}(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

(Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda = 1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36682

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω $\mathrm{M}(x,y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου M ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36683

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με

$$f(x)=\begin{cases}-x+2, & \alpha\nu \quad x<0\\ x+2, & \alpha\nu \quad x\geq 0\end{cases}$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

β)

i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

(Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ)

i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 8)

Θέμα 36684

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με $f(x)=x^2-2x$ και $g(x)=3x-4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από εκείνη της g.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$, βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36777

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη x και y, για τα οποία ισχύουν:

$|x-3| \leq 2$ και $|y-6| \leq 4$.

α) Να αποδείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y.

(Μονάδες 13)

Θέμα 36778

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο αριθμός x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση K είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

Θέμα 36884

ΘΕΜΑ 2

α) Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$(x-1)^2+(y+3)^2 = x^2+y^2-2x+6y+10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y, ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 36885

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-1}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=0$.

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

Θέμα 36886

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$.

(Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

Θέμα 36887

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $2x^2-3x+1<0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

(Μονάδες 9)

Θέμα 36888

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση $3x-1<x+9$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2-\frac{x}{2}\leq x+\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36889

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-5)+f(0)+f(3)$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

Θέμα 36890

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=3$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος.

(Μονάδες 15)

Θέμα 36891

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με θετικό λόγο λ, για την οποία ισχύει: $\alpha_3 = 1$ και $\alpha_5 = 4$.

α) Να βρείτε τον λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι ο $\nu-$οστός όρος της προόδου είναι: $\alpha_\nu = 2^{\nu-3}$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 36892

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|}{3}-\frac{|x|+4}{5}=\frac{2}{3}$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3\leq 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Θέμα 36893

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την ανίσωση: $|2x-1| \leq 7$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-1| > 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 7)

Θέμα 36894

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha < 0$, να δείξετε ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36895

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x+4|=10$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x-5|>1$.

(Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Θέμα 36896

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x=\lambda^2-1$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$. (1)

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις.

(Μονάδες 9)

β)

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση.

(Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 8)

Θέμα 36897

ΘΕΜΑ 2

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1, 2, 3, ..., \nu$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσοι από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους έχουν άθροισμα 45.

(Μονάδες 13)

Θέμα 36898

ΘΕΜΑ 2

α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να δείξετε ότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1).

(Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36899

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να δείξετε ότι:

α) $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$.

(Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 37168

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ανισώσεις : $-x^2+5x-6<0$ (1), $x^2-16\leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των (1), (2).

(Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

(Μονάδες 13)

Θέμα 37169

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι :

$$\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2.$$

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το αρχικό τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

Θέμα 37170

ΘΕΜΑ 2

Η θερμοκρασία Τ σε βαθμούς Κελσίου (°C), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T = 15 + 25 \cdot x, \text{ όταν } 0 \leq x \leq 200$$

α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου, το οποίο βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290^oC.

(Μονάδες 10)

γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440^oC;

(Μονάδες 8)

Θέμα 37171

ΘΕΜΑ 2

Αν α,β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \quad \text{και} \quad \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha\cdot\beta=-15$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

Θέμα 37172

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις:

$$A = \left(\sqrt{2}\right)^6,\ B = \left(\sqrt[3]{3}\right)^6,\quad \Gamma = \left(\sqrt[6]{6}\right)^6.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $A + B + \Gamma = 23$.

(Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 37175

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\begin{cases}8-x, & \text{αν } x<0\\ 2x+5, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $f(-5)=f(4)$.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$,ώστε $f(x)=9$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 37178

ΘΕΜΑ 2

Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x+1$ μέτρα και x μέτρα.

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του.

(Μονάδες 15)

Θέμα 37179

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι παραστάσεις: $K=2a^2+\beta^2$ και $\Lambda=2\alpha\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $K\geq\Lambda$, για κάθε τιμή των α,β.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α,β ισχύει η ισότητα $K=\Lambda$;

(Μονάδες 13)

Θέμα 37181

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0, (1)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ.

(Μονάδες 13)

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 12)

Θέμα 37182

ΘΕΜΑ 2

α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2-x-2=0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2-x-2>0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

(Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε τον αριθμό $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι ο αριθμός $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β);

(Μονάδες 5)

Θέμα 37183

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(0)=5 \text{ και } f(1)=3.$$

α) Να αποδείξετε ότι α=-2 και β = 5.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 8)

Θέμα 37185

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3-16x}{x-4}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και να αποδείξετε ότι, για τα x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι $f(x)=x^2+4x$.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x)=32$.

(Μονάδες 10)

Θέμα 37189

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\neq 0$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A=f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)-f(2)$.

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{5}{2}$.

(Μονάδες 15)

Θέμα 37190

ΘΕΜΑ 3

α) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: $A = x^3 - x^2 + 3x - 3$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{3}{x}$ και $g(x) = x^2 - x + 3$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,3)$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 37191

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:

i. $|1-2x|<5$ (Μονάδες 9)

ii. $|1-2x|\geq 1$ (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

(Μονάδες 7)

Θέμα 37192

ΘΕΜΑ 2

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις)

$\sqrt{2} \cong 1,41$

$\sqrt{3} \cong 1,73$

$\sqrt{5} \cong 2,24$

$\sqrt{7} \cong 2,64$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πως θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3 \cdot \sqrt{20} + \sqrt{80}}{\sqrt{45} - \sqrt{5}}$;

(Μονάδες 13)

Θέμα 37193

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1})\cdot(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1})$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

Θέμα 37195

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 37196

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι $A^2-A=2\cdot(10-\sqrt{5})$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 37197

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=-3$ να αποδείξετε ότι $A^3+A^2+A+1=0$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 37198

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 37199

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι αριθμοί: $A=(\sqrt{2})^6$ και $B=(\sqrt[3]{2})^6$.

α) Να δείξετε ότι: $A-B=4$.

(Μονάδες 13)

β) Να δείξετε ότι: $1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}$.

(Μονάδες 12)

Θέμα 37200

ΘΕΜΑ 2

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1|<2$,

α)Να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K=\frac{|x+3|+|x-1|}{4}$, είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

(Μονάδες 13)

Θέμα 37201

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $A=|x-1|+|y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1<x<4$ και $2<y<3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$.

(Μονάδες 12)

β) $0<A<4$.

(Μονάδες 13)

Θέμα 37202

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο x^2-5x+6.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

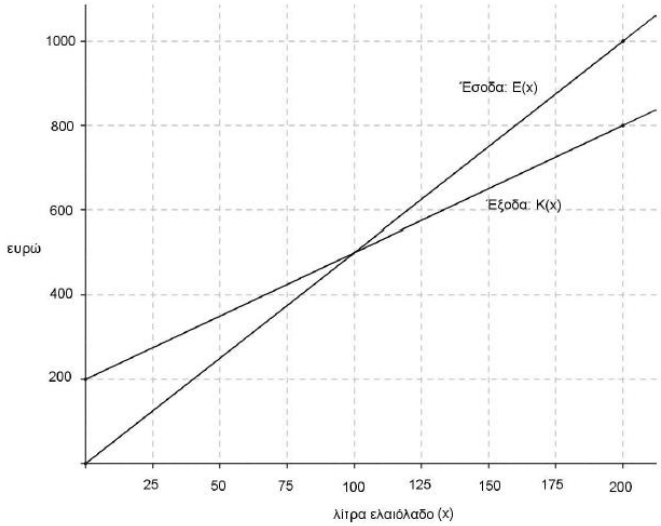
(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in \mathrm{A}$ ισχύει $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

(Μονάδες 8)

Θέμα 37203

ΘΕΜΑ 4



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και τα έσοδα $E(x)$ από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

α) Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

(Μονάδες 6)

β) Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

(Μονάδες 5)

γ) Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημιά;

(Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος γ)

(Μονάδες 8)

Θέμα 37204

ΘΕΜΑ 4

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η $1^η$ σειρά έχει 16 καθίσματα και η $7^η$ σειρά έχει 28 καθίσματα.

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου.

(Μονάδες 05)

β) Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου.

(Μονάδες 04)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο;

(Μονάδες 05)

δ) Αν στην $1^η$ σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη $2^η$ υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην $3^η$ υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη $2^η$ και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i. Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα.

(Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές.

(Μονάδες 06)

Θέμα 37205

ΘΕΜΑ 4

Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της $1^{ης}$ ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της $2^{ης}$ ημέρας καλύπτει 6 τ.μ, στο τέλος της $3^{ης}$ ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

α) Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της $5^{ης}$ ημέρας μετά από το ατύχημα.

(Μονάδες 7)

β) Πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

(Μονάδες 9)

γ) Στο τέλος της $9^{ης}$ ημέρας επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα έχει περιοριστεί στα 12 τ.μ.

(Μονάδες 9)

Θέμα 37206

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+3x+2$ και $g(x)=x+1$, $x\in R$

α) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το οποίο στη συνέχεια να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=x+a$. Να δείξετε ότι:

i. Αν $a>1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h έχουν δύο κοινά σημεία.

ii. Αν $a<1$, τότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, h δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 15)

Θέμα 37817

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A} = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$..

α) Να δείξετε ότι $\mathrm{A} = x^4 + x^2 + 2$.

(Μονάδες 15)

β)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $\mathrm{A} > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της;

(Μονάδες 5)

Θέμα 38203

ΘΕΜΑ 2

α) Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 25 = 0$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση : $x^2 - 36 \leq 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος.

(Μονάδες 9)