

Θέμα 1706.

## ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\mu_\beta, \mu_\gamma$  οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές  $\beta$  και  $\gamma$  αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

**$\Pi$** : Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $\beta = \gamma$ , τότε οι διάμεσοι  $\mu_\beta, \mu_\gamma$  είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση  **$\Pi$** , αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της  **$\Pi$**  και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η  **$\Pi$**  και η **αντίστροφή της** ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

Θέμα 1707.

## ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB < A\Gamma$ ) του παρακάτω σχήματος, η κάθετη στο μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  τέμνει την προέκταση της διχοτόμου  $A\Delta$  στο σημείο  $E$ . Αν  $\Theta, Z$  είναι οι προβολές του  $E$  στις  $AB, A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $EB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

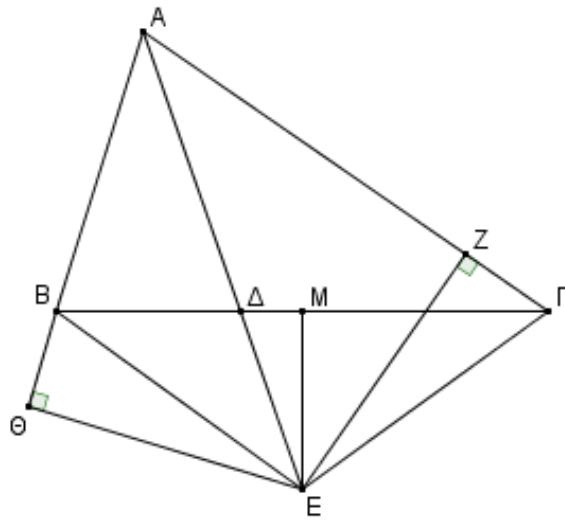
(Μονάδες 5)

β) Τα τρίγωνα  $\Theta BE$  και  $Z\Gamma E$  είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ)  $\hat{A}\Gamma E + \hat{A}\hat{B}E = 180^\circ$ 

(Μονάδες 12)



Θέμα 1708.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) με  $\widehat{B} = 50^\circ$ , το ύψος του  $A\Delta$  και σημείο  $E$  στην  $\Delta\Gamma$  ώστε  $\Delta E = B\Delta$ . Το σημείο  $Z$  είναι η προβολή του  $\Gamma$  στην  $AE$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές.

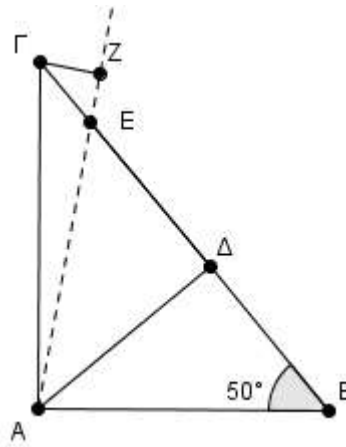
(Μονάδες 6)

ii.  $\widehat{\Gamma A E} = 10^\circ$ .

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $Z\Gamma E$ .

(Μονάδες 9)



Θέμα 1709.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , στο οποίο η εξωτερική του γωνία  $\hat{\Gamma}$  είναι διπλάσια της εσωτερικής του γωνίας  $\hat{A}$ . Από την κορυφή  $A$  διέρχεται ημιευθεία  $Ax \parallel B\Gamma$  στο ημιεπίπεδο  $(AB, \Gamma)$ . Στην ημιευθεία  $Ax$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Η  $B\Delta$  διέρχεται από το μέσο του τμήματος  $A\Gamma$ . (Μονάδες 7)

β) Η  $\Gamma\Delta$  είναι διχοτόμος της  $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\sigma}$ . (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

Θέμα 1723.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB < A\Gamma$ ) και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Φέρουμε από το  $B$  κάθετη στην  $A\Delta$  που τέμνει την  $A\Delta$  στο  $E$  και την πλευρά  $A\Gamma$  στο  $H$ . Αν  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $ABH$  είναι ισοσκελές.

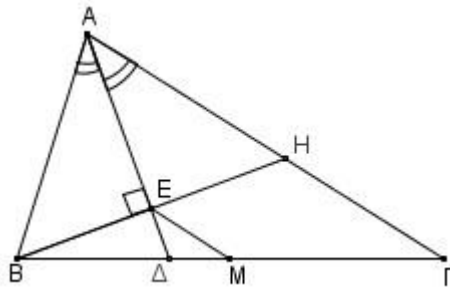
(Μονάδες 9)

β)  $EM \parallel H\Gamma$

(Μονάδες 8)

γ)  $EM = (A\Gamma - AB) / 2$

(Μονάδες 8)



Θέμα 1727.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\Delta\Gamma = 2AB$  και  $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ . Από το Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΔ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Κ και την ΓΔ στο Ε. Επίσης φέρνουμε την ΑΕ που τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Λ.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$

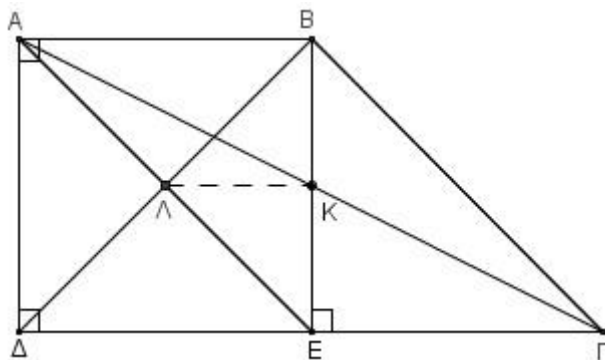
(Μονάδες 8)

β)  $B\Delta = AE$

(Μονάδες 9)

γ)  $ΚΛ = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$ .

(Μονάδες 8)



Θέμα 1728.

ΘΕΜΑ 4

Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν τα σημεία Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

β)  $\widehat{ΑΕΔ} = \widehat{ΒΖΓ}$  (Μονάδες 8)

γ) Οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 9)

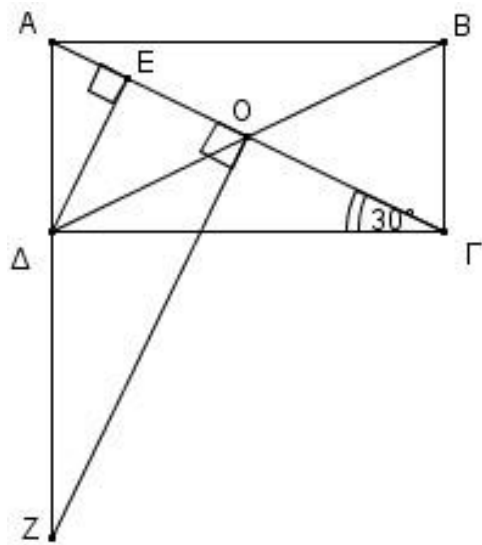
Θέμα 1729.

ΘΕΜΑ 4

Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  είναι  $\hat{\Delta Γ A} = 30^\circ$  και  $O$  το κέντρο του. Φέρουμε  $ΔE \perp AΓ$ .

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A Δ Γ}$  χωρίζεται από τη  $ΔE$  και τη διαγώνιο  $ΔB$  σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην  $AΓ$  στο σημείο  $O$  η οποία τέμνει την προέκταση της  $AΔ$  στο  $Z$ . Να δείξετε ότι τα τρίγωνα  $AZO$  και  $ABΓ$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)



Θέμα 1730.

## ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $ΓΔ$  παραλληλογράμμου  $ABΓΔ$  αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  επιπλέον ισχύει  $AB > AD$ , να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

*Ισχυρισμός 1:* Το τετράπλευρο  $ΔEBZ$  είναι παραλληλόγραμμο.

*Ισχυρισμός 2:*  $\widehat{A\hat{E}D} = \widehat{B\hat{Z}\Gamma}$ .

*Ισχυρισμός 3:* Οι  $DE$  και  $BZ$  είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών  $\widehat{A}$  και  $\widehat{B}$ .

- α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)
- β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Θέμα 1731.

## ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $ΓΔ$  παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$  αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  επιπλέον ισχύουν  $ΑΒ > ΑΔ$  και γωνία  $A$  αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

*Ισχυρισμός 1:* Το τετράπλευρο  $ΔΕΒΖ$  είναι παραλληλόγραμμο.

*Ισχυρισμός 2:* Τα τρίγωνα  $ΑΔΕ$  και  $ΒΓΖ$  είναι ίσα.

*Ισχυρισμός 3:* Τα τρίγωνα  $ΑΔΕ$  και  $ΒΓΖ$  είναι ισοσκελή.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Θέμα 1733.

## ΘΕΜΑ 4

Έστω  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο  $O$  και τυχαίο σημείο  $M$  του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες.

α) Αν  $M_1$  είναι το συμμετρικό του  $M$  ως προς την  $\varepsilon_1$  και  $M_2$  το συμμετρικό του  $M_1$  ως προς την  $\varepsilon_2$ , να αποδείξετε ότι:

- I.  $OM = OM_1$  (Μονάδες 6)
- II. Τα σημεία  $M, O$  και  $M_2$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)
- III. Το τρίγωνο  $MM_1M_2$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν  $M_3$  είναι το συμμετρικό σημείο του  $M_2$  ως προς την  $\varepsilon_1$ , τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το  $MM_1M_2M_3$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

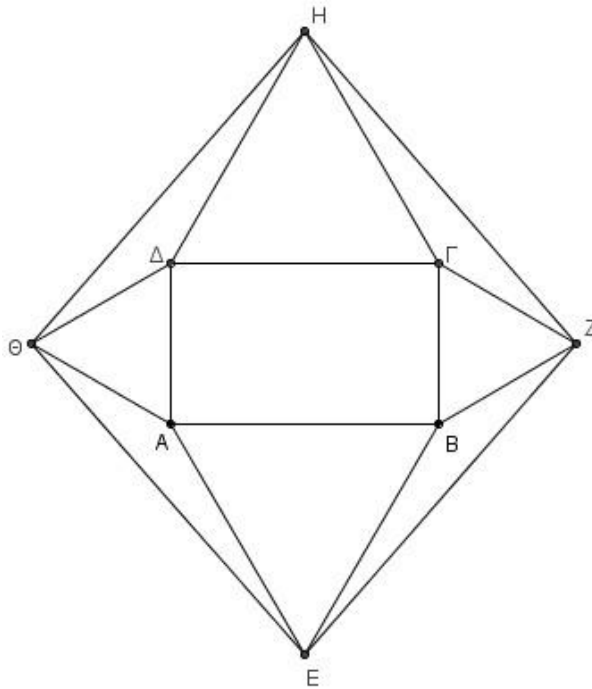
Θέμα 1734.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο  $ΑΒΓΔ$  και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα  $ΑΒΕ$ ,  $ΒΓΖ$ ,  $ΓΔΗ$ ,  $ΔΑΘ$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΕΖΗΘ$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  είναι τετράγωνο, τότε το  $ΕΖΗΘ$  τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



Θέμα 1735.

## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ευθεία  $(\varepsilon)$  και δυο σημεία  $A$  και  $B$  εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιπίεδο σε σχέση με την  $(\varepsilon)$  έτσι ώστε, η ευθεία  $AB$  να μην είναι κάθετη στην  $(\varepsilon)$ . Έστω  $A'$  και  $B'$  τα συμμετρικά σημεία των  $A$  και  $B$  αντίστοιχα ως προς την ευθεία  $(\varepsilon)$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $AA' \parallel BB'$ . (Μονάδες 6)

β) Αν η μεσοκάθετος του  $AB$  τέμνει την ευθεία  $(\varepsilon)$  στο σημείο  $K$ , να αποδείξετε ότι το  $K$  ανήκει και στη μεσοκάθετο του  $A'B'$ . (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη σχέση της ευθείας  $AB$  με την ευθεία  $(\varepsilon)$  ώστε το τετράπλευρο  $ABB'A'$  να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Θέμα 1736.

ΘΕΜΑ 4

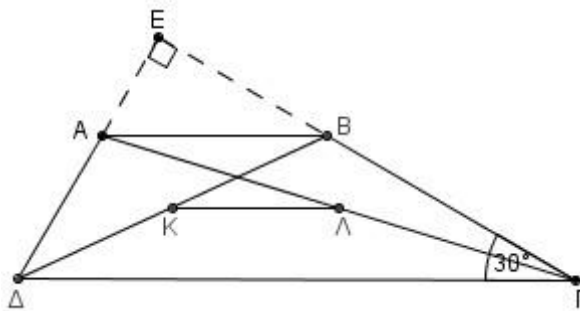
Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με τη γωνία  $\Gamma$  ίση με  $30^\circ$  και έστω  $K, \Lambda$  τα μέσα των διαγωνίων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του  $\Delta A$  και  $\Gamma B$  προεκτεινόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο  $E$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $AB=2AE$  (Μονάδες 10)

β)  $K\Lambda=A\Delta$  (Μονάδες 10)

γ) Σε ποια περίπτωση το  $AB\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



Θέμα 1737.

## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) και το ύψος του  $AH$ . Ονομάζουμε  $\Delta$  και  $E$  τα συμμετρικά σημεία του  $H$  ως προς τις ευθείες  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Αν  $M$  είναι το σημείο τομής του τμήματος  $H\Delta$  με την πλευρά  $AB$  και  $N$  είναι το σημείο τομής του  $HE$  με την πλευρά  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $AH=AD=AE$ . (Μονάδες 10)

β) Η γωνία  $EHD$  είναι ορθή. (Μονάδες 8)

γ) Τα σημεία  $A$ ,  $E$  και  $\Delta$  είναι συνευθειακά και  $MN = \frac{\Delta E}{2}$ . (Μονάδες 7)

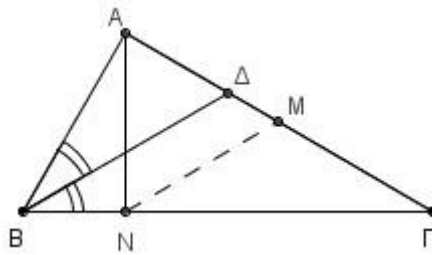
Θέμα 1738.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ , και η διχοτόμος  $B\Delta$  της γωνίας  $\hat{B}$ . Από το μέσο  $M$  της  $A\Gamma$  φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο  $B\Delta$  που τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο  $N$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)  
 β) Το τρίγωνο  $MN\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)  
 γ)  $AN \perp B\Gamma$  (Μονάδες 10)



Θέμα 1740.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ακόλουθες προτάσεις Π1 και Π2:

**Π1:** Αν ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, τότε οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.

**Π2:** Αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε το παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος.

α) Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προτάσεις Π1 και Π2 αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 20)

β) Στην περίπτωση που και οι δύο προτάσεις ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως μια ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

Θέμα 1741.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και έστω  $K, \Lambda$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Θεωρούμε τυχαίο σημείο  $M$  στο εσωτερικό του τριγώνου και  $\Delta, E$  τα συμμετρικά του  $M$  ως προς  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $\Delta E // B\Gamma$ .

(Μονάδες 15)

β) Στην περίπτωση που το σημείο  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ , και  $\Delta, E$  τα συμμετρικά του  $M$  ως προς  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $\Delta, A$  και  $E$  είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 10)

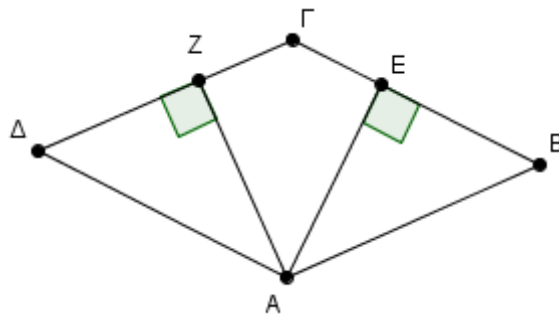
Θέμα 1742.

## ΘΕΜΑ 4

Το τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε  $AZ \perp ΓΔ$  και  $AE \perp ΓΒ$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $ZAE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- β) Η ευθεία  $ΑΓ$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $ZE$ . (Μονάδες 9)
- γ) Αν  $M$  και  $N$  τα μέσα των πλευρών  $ΑΔ$  και  $ΑΒ$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $MN \parallel ZE$  και  $ZM=EN$ . (Μονάδες 10)



Θέμα 1743.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ρόμβος  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{\Gamma} = 120^\circ$ . Έστω ότι  $AE$  και  $AZ$  είναι οι αποστάσεις του σημείου  $A$  στις πλευρές  $\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

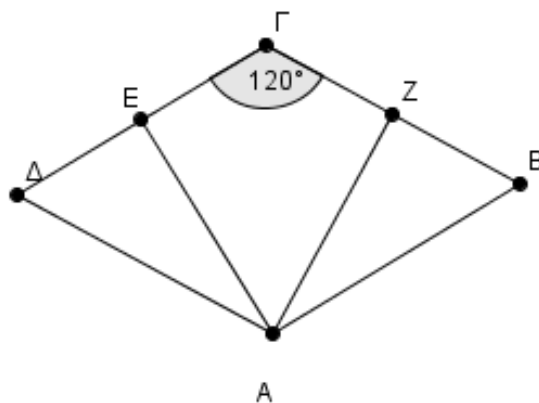
i. Τα σημεία  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B$  αντίστοιχα.

(Μονάδες 8)

ii.  $A\Gamma \perp EZ$ .

(Μονάδες 8)

β) Αν  $M$  και  $N$  τα μέσα των πλευρών  $A\Delta$  και  $AB$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $EMNZ$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)



Θέμα 1744.

## ΘΕΜΑ 4

Στο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) φέρουμε τις διαμέσους  $B\Delta$  και  $ΓΕ$ . Μία ευθεία  $\epsilon$  παράλληλη στη βάση  $B\Gamma$  τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα και τις διαμέσους  $B\Delta$  και  $ΓΕ$  στα σημεία  $\Theta$  και  $K$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $BZ=GH$ .

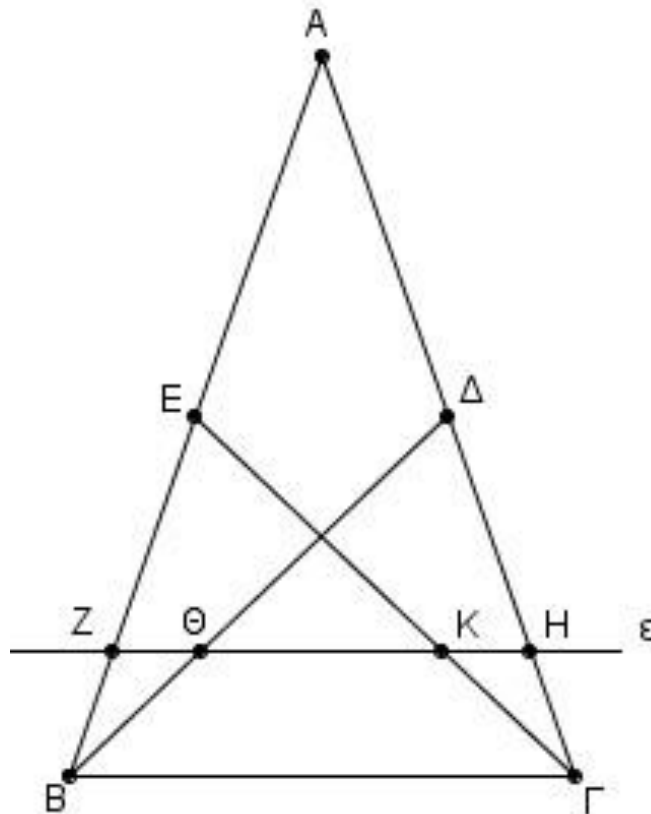
(Μονάδες 8)

β) τα τρίγωνα  $ZB\Theta$  και  $HK\Gamma$  είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ)  $ZK=H\Theta$ .

(Μονάδες 8)



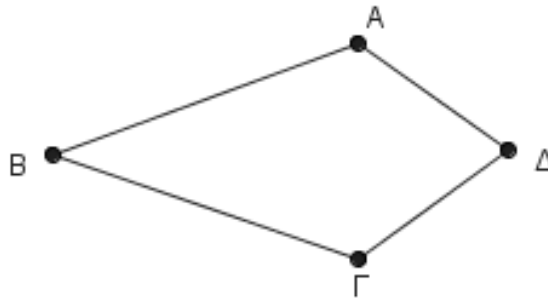
Θέμα 1745.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  με  $ΒΑ = ΒΓ$  και  $\hat{Α} = \hat{Γ}$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $ΑΔΓ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
- β) Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου  $ΑΒΓΔ$  τέμνονται κάθετα. (Μονάδες 6)
- γ) Το τετράπλευρο που έχει για κορυφές τα μέσα των πλευρών του  $ΑΒΓΔ$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



Θέμα 1746.

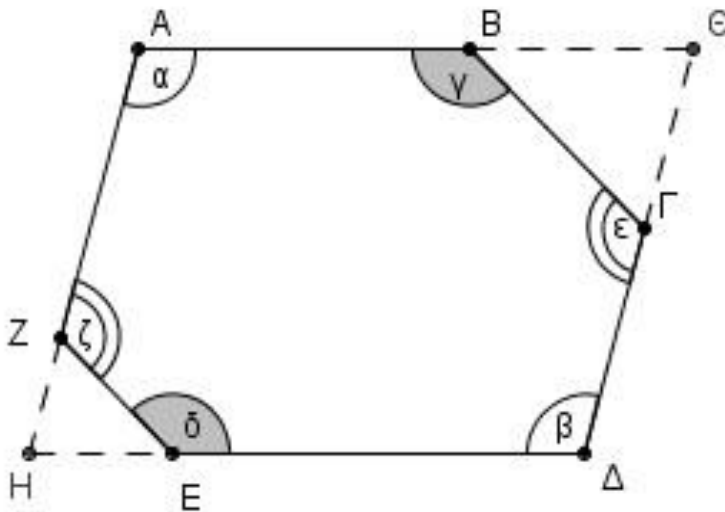
ΘΕΜΑ 4

Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής:  $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$  και  $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$ .

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$ . (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

- i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές (Μονάδες 10)
- ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



Θέμα 1747.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  με διάμετρο  $AB$  και δυο ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου  $AB$ . Έστω ότι, μια τρίτη ευθεία  $\varepsilon$  εφάπτεται του κύκλου σ' ένα σημείο του  $E$  και τέμνει τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στα  $\Delta$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Αν το σημείο  $E$  δεν είναι το μέσο του τόξου  $AB$ , να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)

ii.  $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$ . (Μονάδες 8)

β) Αν το σημείο  $E$  βρίσκεται στο μέσον του τόξου  $AB$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta\Gamma B$  είναι ορθογώνιο. Στην περίπτωση αυτή να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου  $A\Delta\Gamma B$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R$  του κύκλου.

(Μονάδες 9)

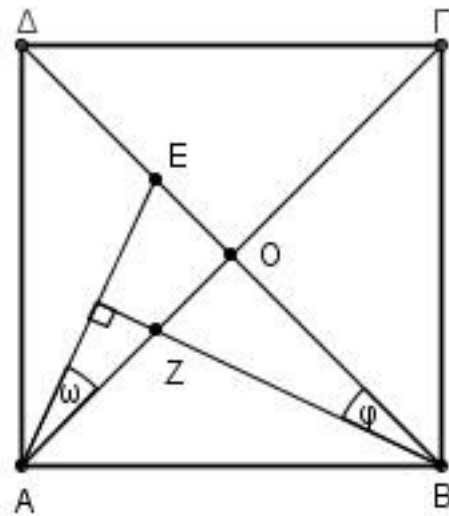
Θέμα 1748.

ΘΕΜΑ 4

Στο τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  ονομάζουμε  $O$  το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο  $E$  του τμήματος  $OD$ . Φέρνουμε την κάθετη από το  $B$  στην  $AE$ , που τέμνει το τμήμα  $AO$  στο  $Z$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Οι γωνίες  $\omega$  και  $\phi$  του παρακάτω σχήματος είναι ίσες. (Μονάδες 6)
- β)  $BZ=AE$  και  $\Gamma Z=BE$  (Μονάδες 12)
- γ) Το τμήμα  $EZ$  είναι κάθετο στο  $AB$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 1749.

## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε δυο σημεία A και B τα οποία βρίσκονται στο ίδιο μέρος ως προς μια ευθεία (ε), τέτοια ώστε η ευθεία AB δεν είναι κάθετη στην (ε). Έστω A' το συμμετρικό του A ως προς την ευθεία (ε), δηλαδή η (ε) είναι μεσοκάθετος του AA'.

α) Αν η A'B τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο O, να αποδείξετε ότι:

i. Η ευθεία (ε) διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{AOA'}$ . (Μονάδες 6)

ii. Οι ημιευθείες OA και OB σχηματίζουν ίσες οξείες γωνίες με την ευθεία (ε).  
(Μονάδες 6)

β) Αν K είναι ένα άλλο σημείο πάνω στην ευθεία (ε), να αποδείξετε ότι:

i.  $KA=KA'$  (Μονάδες 6)

ii.  $KA+KB>AO+OB$  (Μονάδες 7)

Θέμα 1750.

ΘΕΜΑ 4

Στο τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  προεκτείνουμε την πλευρά  $AB$  κατά τμήμα  $BN$  και την πλευρά  $B\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma M = AN$ .

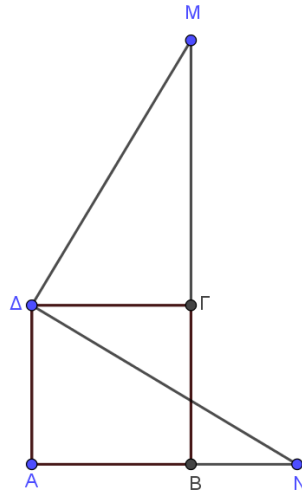
Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Delta N = \Delta M$

(Μονάδες 12)

β)  $\Delta N \perp \Delta M$

(Μονάδες 13)



Θέμα 1751.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι ο κύκλος  $(O, \rho)$  εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου  $PGE$  στα σημεία  $A, \Delta$  και  $B$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

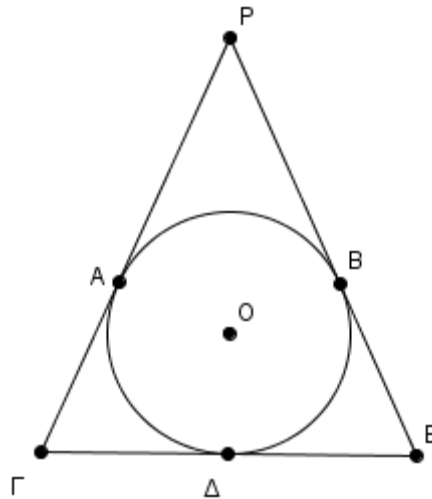
I.  $PG = GD + AP$  (Μονάδες 6)

II.  $PG - GD = PE - DE$  (Μονάδες 8)

β) Αν  $AG=BE$ , να αποδείξετε ότι

I. Το τρίγωνο  $PGE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

II. Τα σημεία  $P, O$  και  $\Delta$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)



Θέμα 1752.

## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο κέντρου  $O$  και εξωτερικό σημείο του  $P$ . Από το  $P$  φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα  $PA$  και  $PB$ . Η διακεντρική ευθεία  $PO$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $\Lambda$ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο  $\Lambda$  τέμνει τα  $PA$  και  $PB$  στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο  $P\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
- β)  $\Gamma A = \Delta B$ . (Μονάδες 8)
- γ) η περίμετρος του τριγώνου  $P\Gamma\Delta$  είναι ίση με  $PA + PB$ . (Μονάδες 7)

Θέμα 1754.

## ΘΕΜΑ 4

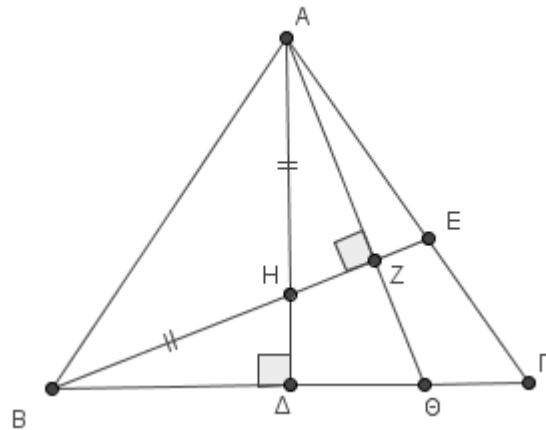
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ύψος του  $A\Delta$ . Στο  $A\Delta$  θεωρούμε σημείο  $H$  τέτοιο ώστε  $HA=HB$ . Έστω ότι  $E$  είναι το σημείο τομής της  $BH$  με την  $A\Gamma$ . Φέρνουμε την  $AZ$  κάθετη στην  $BE$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο  $\Theta$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα  $H\Delta B$  και  $HZA$  είναι ίσα. (Μονάδες 6)
- ii.  $\Delta\Theta = \Theta Z$ . (Μονάδες 6)
- iii. Η ευθεία  $\Theta H$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 6)

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκентρο του τριγώνου  $AHB$  ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



## ΘΕΜΑ 4

Σε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB//\Gamma\Delta$ ) είναι  $AB=AD$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$ . (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου  $E$ , ώστε το τετράπλευρο  $ABE\Delta$  να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον είναι γωνία  $BA\Delta=120^\circ$  και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο  $O$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $EOB\Gamma$ . (Μονάδες 8)

## Θέμα 17 ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$ , τέτοιο ώστε  $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ ,  $ΑΒ = \frac{1}{4} ΔΓ$  και  $ΑΒ = \frac{1}{3} ΑΔ$ . Επιπλέον, φέρουμε  $ΒΕ \perp ΔΓ$ .

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΑΒΕΔ$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ΒΕΓ$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 10)
- γ) Αν  $Κ, Λ$  είναι τα μέσα των  $ΒΕ$  και  $ΑΓ$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η  $ΑΓ$  διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος  $ΒΚ$ . (Μονάδες 9)

Θέμα 1758.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  με διάμετρο  $AB$  και ευθείες  $\epsilon_1, \epsilon_2$  εφαπτόμενες του κύκλου στα άκρα της διαμέτρου  $AB$ . Θεωρούμε ευθεία  $\epsilon$  εφαπτομένη του κύκλου σε σημείο του  $E$ , η οποία τέμνει τις  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  στα  $\Delta$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $\Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$

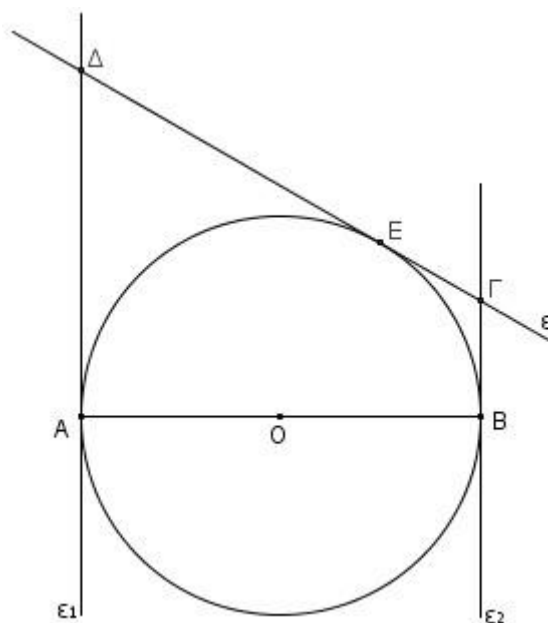
(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Gamma O\Delta$  είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Να διερευνήσετε το είδος του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$  ανάλογα με τη θέση του σημείου  $E$  στο ημικύκλιο  $AB$ .

(Μονάδες 7)



Θέμα 1759.

## ΘΕΜΑ 4

Σε παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  με γωνία  $A$  αμβλεία, ισχύει ότι  $AB=2AD$ . Τα σημεία  $E$  και  $Z$ , είναι μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $ΓΔ$  αντίστοιχα. Από το  $Δ$  φέρουμε τη  $ΔH$  κάθετη στην προέκταση της  $BΓ$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $AEZΔ$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $EZH$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Το τμήμα  $HE$ , είναι διχοτόμος της γωνίας  $Z\hat{H}Γ$ . (Μονάδες 8)

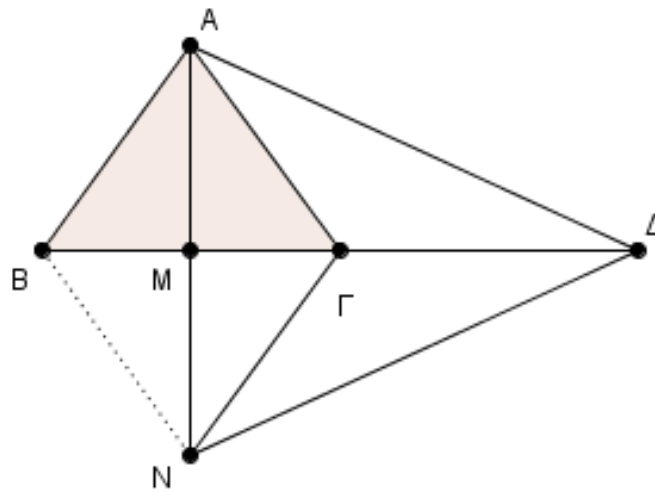
Θέμα 1760.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και  $AM$  το ύψος του στην πλευρά  $B\Gamma$ . Στην προέκταση του  $AM$  θεωρούμε τμήμα  $MN=AM$ . Στην προέκταση του  $B\Gamma$  προς το μέρος του  $\Gamma$  θεωρούμε τμήμα  $\Gamma\Delta = B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $ABN\Gamma$  ρόμβος. (Μονάδες 8)
- β) Το τρίγωνο  $A\Delta N$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- γ) Το σημείο  $\Gamma$  είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου  $A\Delta N$ . (Μονάδες 9)



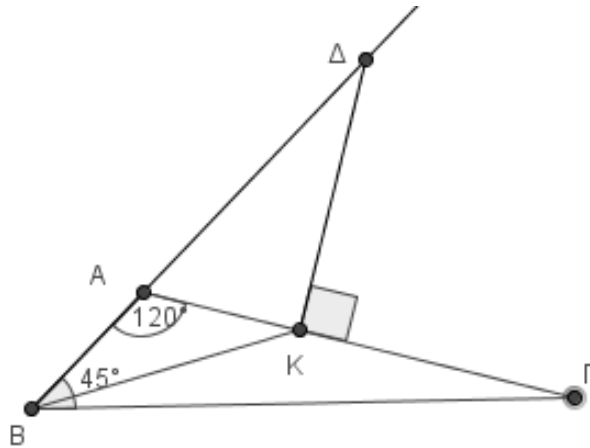
Θέμα 1761.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με γωνία  $A$  ίση με  $120^\circ$  και γωνία  $B$  είναι ίση με  $45^\circ$ . Στην προέκταση της  $BA$  προς το  $A$ , παίρνουμε τμήμα  $A\Delta = 2AB$ . Από το  $\Delta$  φέρνουμε την κάθετη στην  $A\Gamma$  που την τέμνει στο σημείο  $K$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία  $A\Delta K$  είναι ίση με  $30^\circ$ . (Μονάδες 6)
- β) Το τρίγωνο  $KAB$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- γ) Αν  $Z$  το μέσο της  $\Delta A$ , τότε  $\angle ZKB = 90^\circ$ . (Μονάδες 6)
- δ) Το σημείο  $K$  ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος  $B\Delta$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 1764.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο  $ΑΒΓΔ$  με κέντρο  $Ο$  και  $ΑΓ = 2ΒΓ$ . Στην προέκταση της πλευράς  $ΔΑ$ , προς το  $Α$ , παίρνουμε σημείο  $Ε$  ώστε  $ΔΑ = ΑΕ$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $ΑΕΒΓ$  είναι παραλληλόγραμμο.

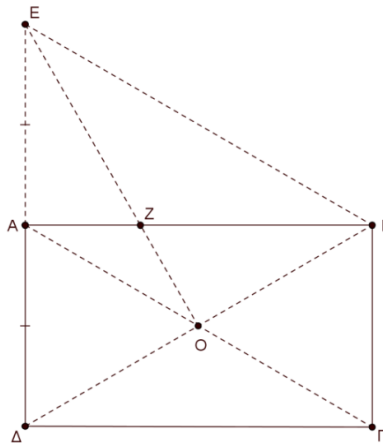
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $ΕΒΔ$  είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 9)

γ) Αν η  $ΕΟ$  τέμνει την πλευρά  $ΑΒ$  στο σημείο  $Ζ$ , να αποδείξετε ότι  $ΔΖ \perp ΕΒ$ .

(Μονάδες 8)



## ΘΕΜΑ 4

Θέμα 1766.

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Έστω Ε το συμμετρικό σημείο του Β ως προς το Δ και Ζ είναι το μέσο της ΑΔ. Η προέκταση της ΓΔ τέμνει την ΑΕ στο Η.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Delta\text{H} = \frac{\text{AB}}{2}$

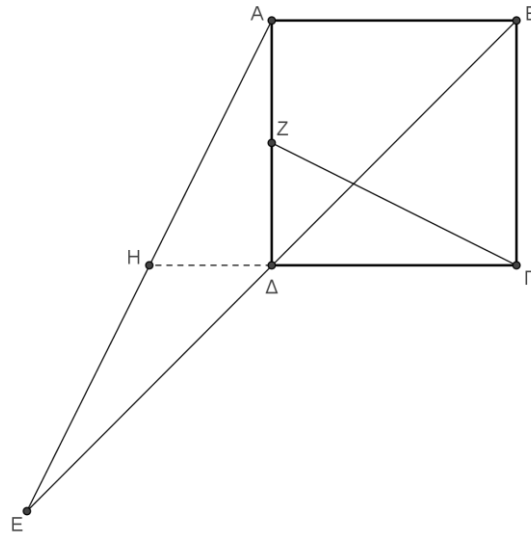
(Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ.

(Μονάδες 8)



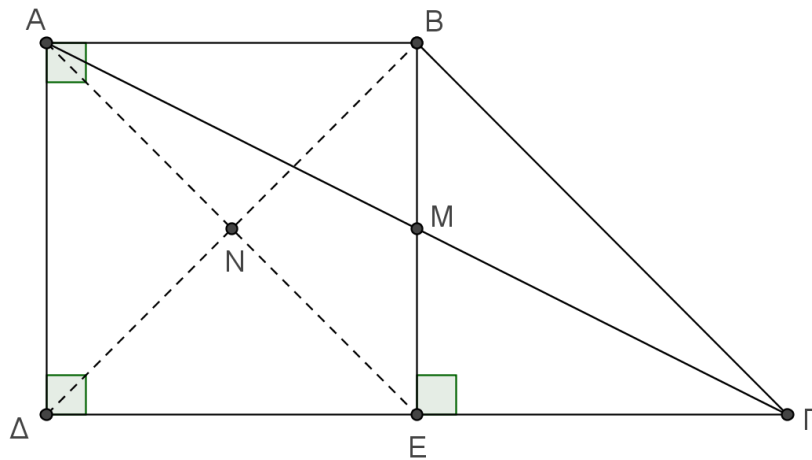
Θέμα 1767.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\Delta\Gamma = 2AB$  και  $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ . Φέρνουμε  $BE \perp \Delta\Gamma$  που τέμνει τη διαγώνιο  $A\Gamma$  στο  $M$ . Φέρνουμε την  $AE$  που τέμνει τη διαγώνιο  $B\Delta$  στο  $N$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ . (Μονάδες 7)
- β) Το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- γ)  $AE \perp B\Delta$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 1770.

## ΘΕΜΑ 4

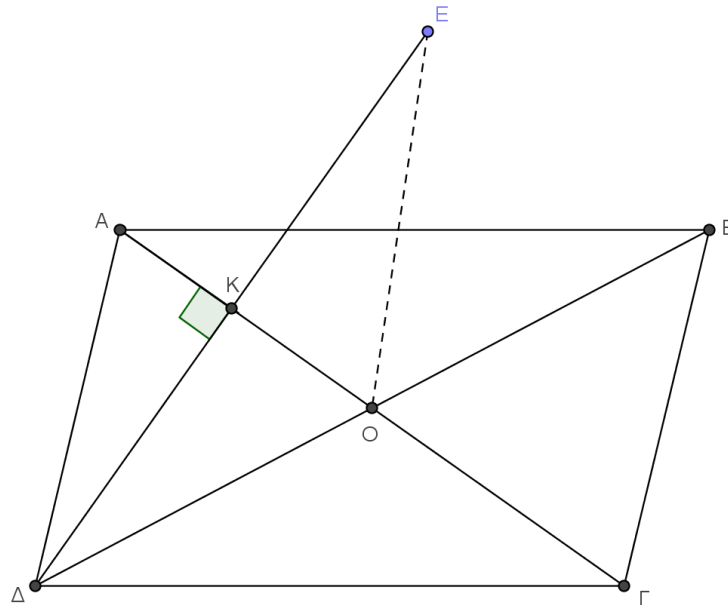
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Ο το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔΚ κάθετο στην ΑΓ και στην προέκτασή του προς το Κ θεωρούμε σημείο Ε, ώστε  $ΚΕ = ΔΚ$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $ΕΟ = \frac{ΒΔ}{2}$ . (Μονάδες 8)

β) Η γωνία  $\hat{\Delta Ε Β}$  είναι ορθή. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



Θέμα 1771.

ΘΕΜΑ 4

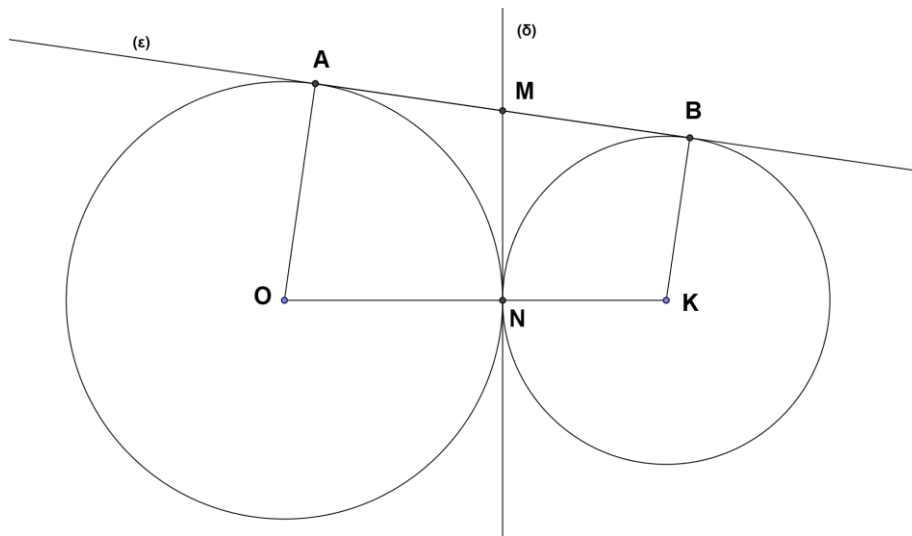
Δύο κύκλοι  $(O, \rho_1)$ ,  $(K, \rho_2)$  εφάπτονται εξωτερικά στο  $N$ . Μια ευθεία  $(\epsilon)$  εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία  $A, B$  αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο  $N$  τέμνει την  $(\epsilon)$  στο  $M$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το  $M$  είναι μέσον του  $AB$ . (Μονάδες 7)

β)  $\widehat{OMK} = 90^\circ$  (Μονάδες 9)

γ)  $\widehat{ANB} = 90^\circ$  (Μονάδες 9)

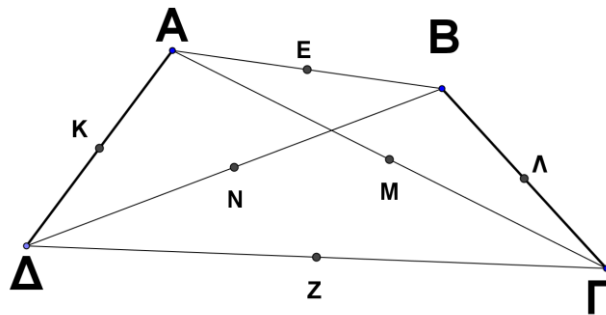


Θέμα 1773.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $A\Delta=B\Gamma$ . Αν  $E, \Lambda, Z, K, N, M$  είναι τα μέσα των  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A, \Delta B$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $EMZN$  ρόμβος. (Μονάδες 8)
- β) Η  $EZ$  είναι μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος  $MN$ . (Μονάδες 7)
- γ)  $KE=Z\Lambda$  (Μονάδες 5)
- δ) Τα ευθύγραμμα τμήματα  $K\Lambda, MN, EZ$  διέρχονται από ίδιο σημείο. (Μονάδες 5)



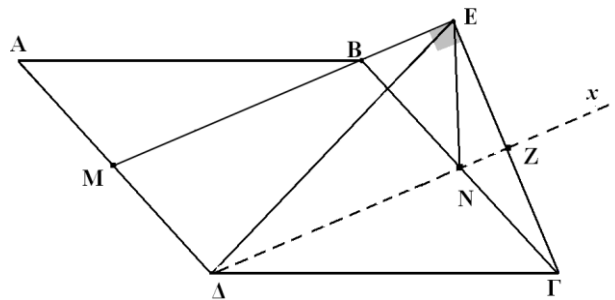
Θέμα 1775.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Θεωρούμε το μέσο  $M$  της πλευράς  $A\Delta$  και  $\Gamma E$  κάθετος από τη κορυφή  $\Gamma$  στην ευθεία  $MB$  ( $\Gamma E \perp MB$ ). Η παράλληλη από την κορυφή  $\Delta$  στην ευθεία  $MB$  ( $\Delta x \parallel MB$ ) τέμνει τις  $B\Gamma$  και  $\Gamma E$  στα σημεία  $N$ ,  $Z$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $MBN\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)
- β) Το σημείο  $Z$  είναι μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $\Gamma E$ . (Μονάδες 9)
- γ)  $\Delta E = \Delta \Gamma$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 1777.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $BE$ ,  $\Gamma Z$ , τα ύψη από τις κορυφές  $B$ ,  $\Gamma$  αντίστοιχα και  $H$  το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα  $M$ ,  $N$ ,  $K$ ,  $\Lambda$  μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων  $AB$ ,  $A\Gamma$ ,  $\Gamma H$ ,  $BH$  αντίστοιχα.

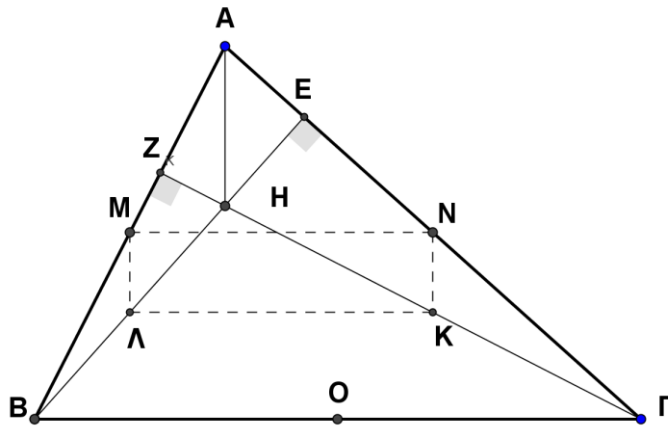
α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $MN = \Lambda K$  (Μονάδες 6)

ii.  $NK = M\Lambda = \frac{AH}{2}$  (Μονάδες 6)

iii. Το τετράπλευρο  $MNKL$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

β) Αν το  $O$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι το  $\widehat{MOK} = 90^\circ$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 1778.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθή γωνία  $\widehat{xOy}$  και τα σημεία A και B των ημιευθειών Oy και Ox αντίστοιχα με  $OA = OB$ . Μία ευθεία ( $\varepsilon$ ) η οποία δεν είναι παράλληλη στην AB διέρχεται από το O ώστε τα σημεία A και B να είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο. Η κάθετη από το A στην ( $\varepsilon$ ) την τέμνει στο Δ και η κάθετη από το B στην ( $\varepsilon$ ) την τέμνει στο E.

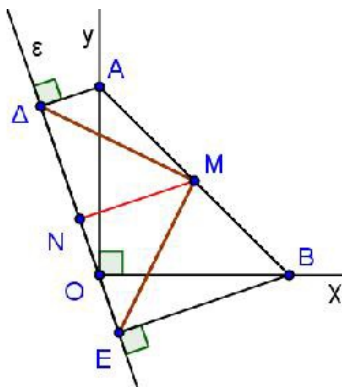
Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα OAD και OEB είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β)  $AD + BE = DE$ . (Μονάδες 7)

γ)  $MN = \frac{DE}{2}$ , όπου M και N τα μέσα των AB και DE αντίστοιχα. (Μονάδες 7)

δ) Το τρίγωνο ΔME είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (Μονάδες 4)



Θέμα 1780.

ΘΕΜΑ 4

Σε τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  προεκτείνουμε τη διαγώνιο  $B\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) κατά τμήμα  $\Delta E = \Delta B$ .

Έστω  $M$  το μέσο της  $A\Delta$  και  $N$  το σημείο τομής των ευθειών  $AE$  και  $\Gamma\Delta$ .

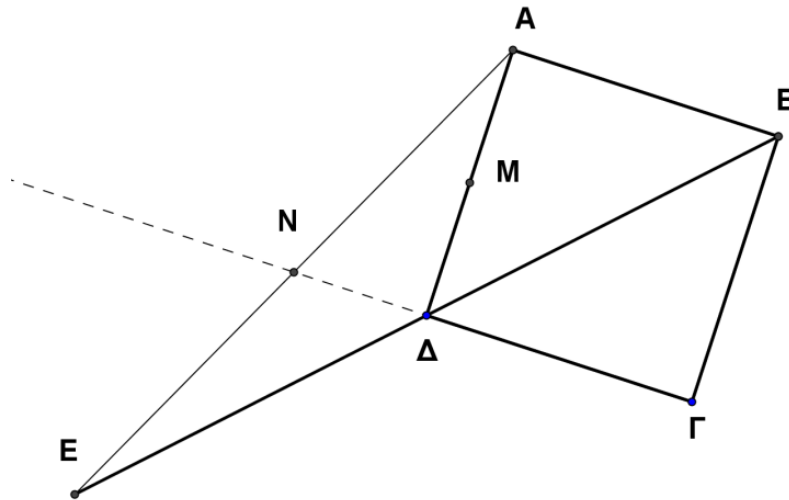
α) Να αποδείξετε ότι  $\Delta N = \Delta M$ . (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $NM\Delta$ . (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i.  $MN \perp A\Gamma$  (Μονάδες 7)

ii.  $\Gamma M \perp AN$  (Μονάδες 7)



Θέμα 1781.

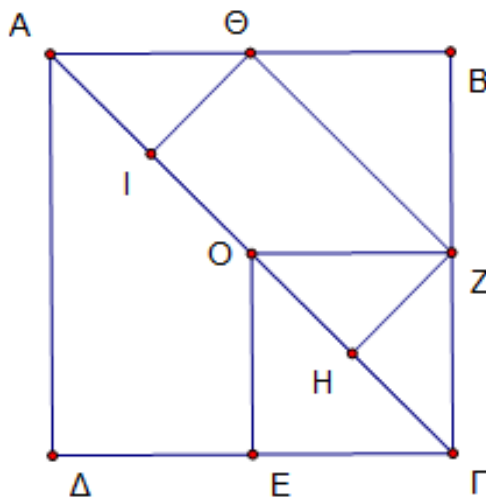
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στη διαγώνιο ΑΓ θεωρούμε σημεία Ι, Ο, Η ώστε  $ΑΙ = ΙΟ = ΟΗ = ΗΓ$ . Αν Ε, Θ και Ζ τα μέσα των πλευρών ΔΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΟΖΓΕ είναι τετράγωνο. (Μονάδες 7)

β)  $ZH = \frac{AG}{4}$ . (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΙΘΖΗ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, με  $ΘΖ = 2ΘΙ$ . (Μονάδες 10)

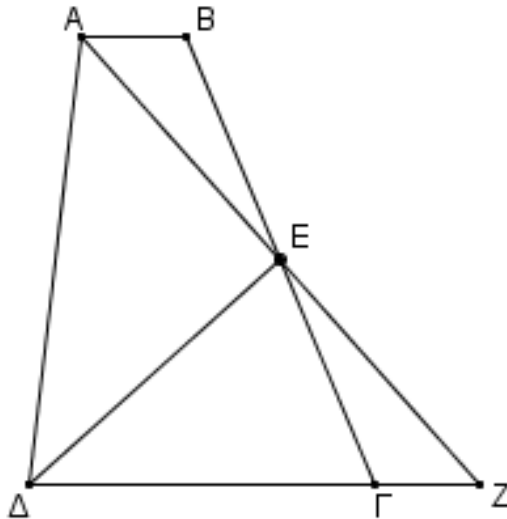


Θέμα 1783.

## ΘΕΜΑ 4

Σε τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ) ισχύει  $ΑΒ+ΓΔ=ΑΔ$ . Αν η διχοτόμος της γωνίας  $A$  τέμνει την  $ΒΓ$  στο  $E$  και την προέκταση της  $ΔΓ$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $ΔΑΖ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)  
β) Το  $E$  είναι το μέσο της  $ΒΓ$  (Μονάδες 10)  
γ) Η  $ΔΕ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $Δ$  του τραπέζιου. (Μονάδες 8)



Θέμα 1784.

ΘΕΜΑ 4

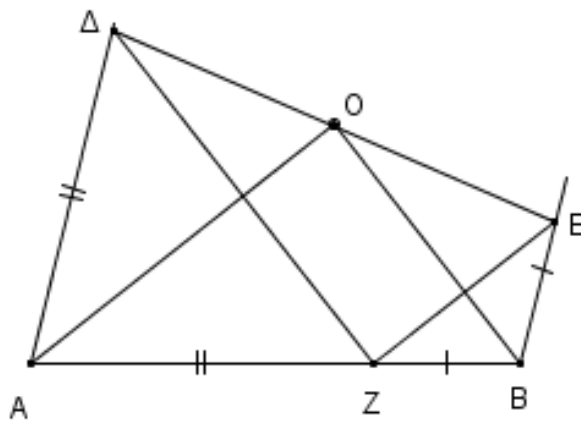
Δίνεται τραπέζιο  $AΔEB$ , με  $AΔ//BE$ , στο οποίο ισχύει ότι  $AB=AΔ+BE$ , και  $O$  το μέσον της  $ΔE$ . Θεωρούμε σημείο  $Z$  στην  $AB$  τέτοιο ώστε  $AZ=AΔ$  και  $BZ=BE$ .

Αν γωνία  $\hat{\Delta AZ} = \varphi$ ,

α) να εκφράσετε τη γωνία  $AZΔ$  σε συνάρτηση με τη  $\varphi$ . (Μονάδες 8)

β) να εκφράσετε τη γωνία  $EZB$  σε συνάρτηση με τη  $\varphi$ . (Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι οι  $OA$  και  $OB$  είναι μεσοκάθετοι των τμημάτων  $ΔZ$  και  $ZE$  αντίστοιχα. (Μονάδες 9)



Θέμα 1785.

**ΘΕΜΑ 4**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , με  $AB > AD$ . Θεωρούμε σημεία  $K, \Lambda$ , των  $AD$  και  $AB$  αντίστοιχα ώστε  $AK = A\Lambda$ . Έστω  $M$  το μέσο του  $K\Lambda$  και η προέκταση του  $AM$  (προς το  $M$ ) τέμνει τη  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $AD = DE$ .

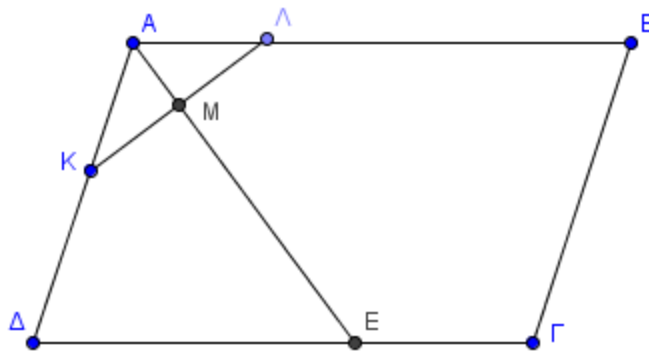
(Μονάδες 8)

β)  $B\Gamma + \Gamma E = AB$ .

(Μονάδες 10)

γ)  $\hat{B} = 2 \cdot \hat{A}\hat{\Lambda}\hat{K}$ .

(Μονάδες 7)



Θέμα 1786.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB=2B\Gamma$  και τη γωνία  $B$  αμβλεία. Από την κορυφή  $A$  φέρουμε την  $AE$  κάθετη στην ευθεία  $B\Gamma$  και έστω  $M, N$  τα μέσα των  $AB, \Delta\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $MB\Gamma N$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)
- β) Το τετράπλευρο  $ME\Gamma N$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)
- γ) Η  $EN$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{ME\Gamma}$ . (Μονάδες 8)

Θέμα 1787.

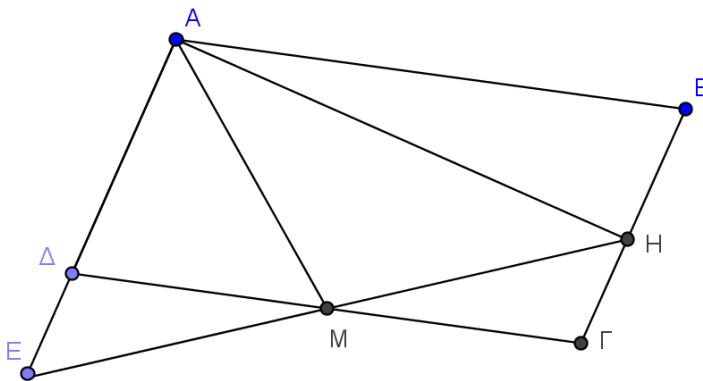
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 2 B\Gamma$ , τη γωνία  $A$  αμβλεία και  $M$  το μέσο της  $\Gamma\Delta$ . Φέρουμε κάθετη στην  $A\Delta$  στο σημείο  $A$ , η οποία τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $H$ . Αν η προέκταση της  $HM$  τέμνει την προέκταση της  $A\Delta$  στο  $E$ , να αποδείξετε ότι:

α) Η  $AM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta AB$ . (Μονάδες 9)

β) Τα τμήματα  $E\Delta$ ,  $\Gamma\Delta$  διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

γ)  $\hat{E} = \hat{M}A$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 1788.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα  $AB\Delta E$  και  $A\Gamma ZH$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{EAH} = \widehat{AB\Gamma} + \widehat{A\Gamma B}$

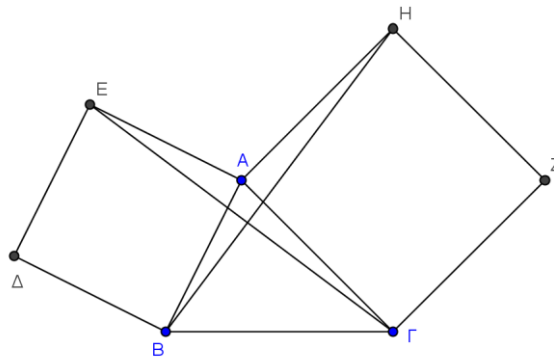
(Μονάδες 8)

β)  $E\Gamma = BH$

(Μονάδες 9)

γ) Η  $E\Gamma$  είναι κάθετη στη  $BH$ .

(Μονάδες 8)



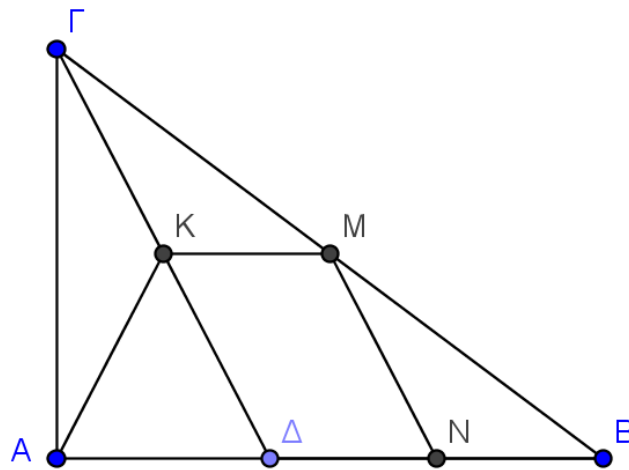
Θέμα 1789.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή, και τυχαίο σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$ . Έστω  $K, M, N$  τα μέσα των  $\Gamma\Delta, B\Gamma, B\Delta$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $KMND$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- β) Το τετράπλευρο  $AKMN$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)
- γ) Η διάμεσος του τραπεζίου  $AKMN$  είναι ίση με  $\frac{AB}{2}$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 1790.

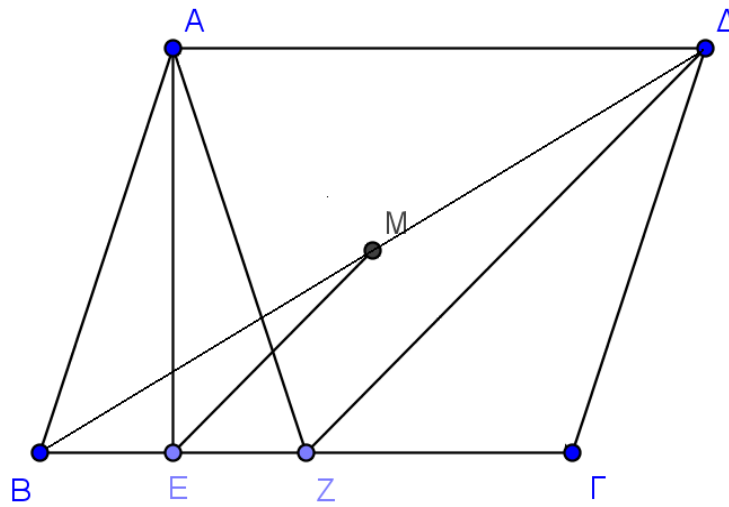
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με τη γωνία του  $B$  να είναι ίση με  $70^\circ$  και το ύψος του  $AE$ . Έστω  $Z$  σημείο της  $B\Gamma$  ώστε  $BE = EZ$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AZ\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου  $AZ\Gamma\Delta$  (Μονάδες 9)

γ) Αν  $M$  το μέσο του  $B\Delta$ , να αποδείξετε ότι  $EM = \frac{A\Gamma}{2}$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 1791.

ΘΕΜΑ 4

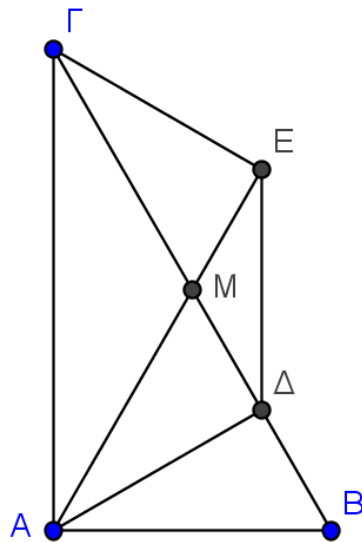
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ . Φέρουμε το ύψος του  $A\Delta$  και τη διάμεσό του  $AM$ . Από το  $\Gamma$  φέρουμε κάθετη στην ευθεία  $AM$ , η οποία την τέμνει στο  $E$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $AMB$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β)  $ME = M\Delta = B\Gamma/4$  (Μονάδες 9)

γ) Το  $A\Delta E\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



Θέμα 1792.

ΘΕΜΑ 4

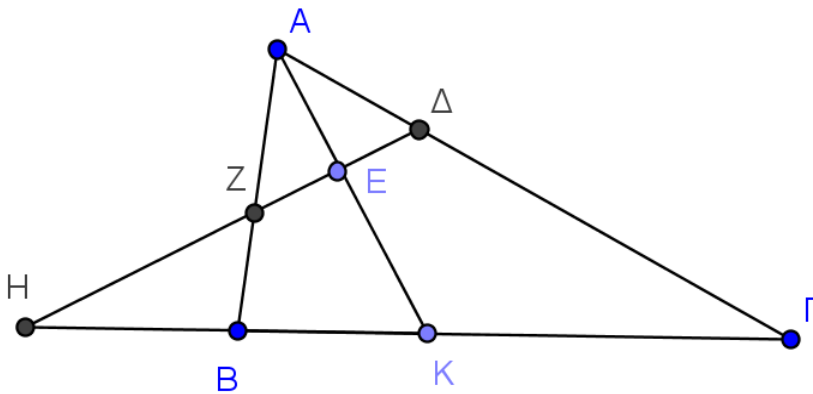
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Φέρουμε τη διχοτόμο του  $AK$  και σε τυχαίο σημείο της  $E$  φέρουμε ευθεία κάθετη στη διχοτόμο  $AK$ , η οποία τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $Z$  και  $\Delta$  αντίστοιχα και την προέκταση της  $GB$  στο σημείο  $H$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{Z\Delta\Gamma} = 90^\circ + \frac{\widehat{A}}{2}$ . (Μονάδες 7)

β)  $ZK = K\Delta$ . (Μονάδες 8)

γ)  $\widehat{ZH\Gamma} = \frac{\widehat{B} - \widehat{\Gamma}}{2}$ . (Μονάδες 10)



Θέμα 1794.

ΘΕΜΑ 4

α) Σε ορθογώνιο  $ΑΒΓΔ$  θεωρούμε  $Κ, Λ, Μ, Ν$  τα μέσα των πλευρών του  $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΚΛΜΝ$  είναι ρόμβος.

(Μονάδες 15)

β) Σε ένα τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  τα μέσα  $Κ, Λ, Μ, Ν$  των πλευρών του  $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ$  αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Το τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$ , πρέπει να είναι απαραίτητα ορθογώνιο; Να τεκμηριώσετε τη θετική ή αρνητική σας απάντηση.

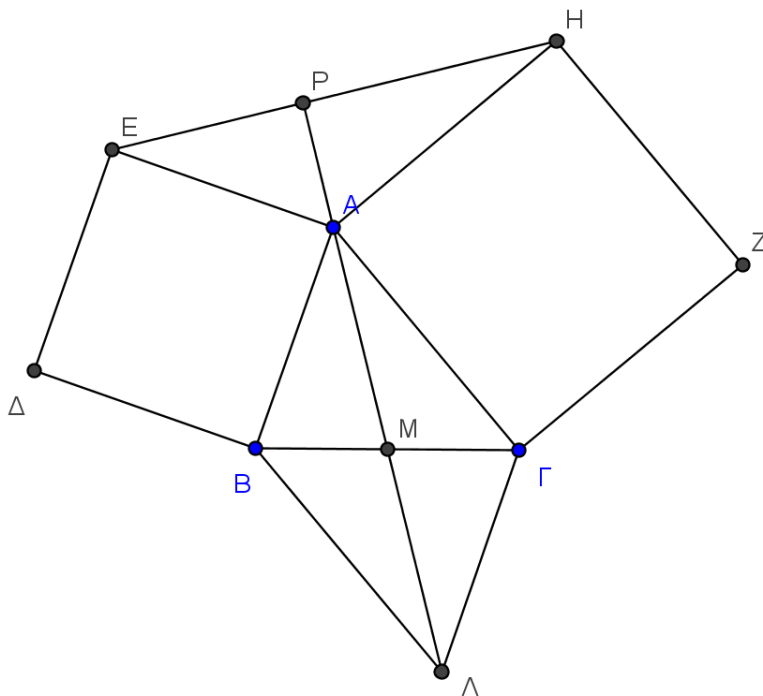
(Μονάδες 10)

Θέμα 1795.

ΘΕΜΑ 4

Εκτός τριγώνου  $AB\Gamma$  κατασκευάζουμε τετράγωνα  $AB\Delta E$  και  $A\Gamma ZH$ . Αν  $M$  το μέσο του  $B\Gamma$  και  $\Lambda$  σημείο στην προέκταση της  $AM$  τέτοιο ώστε  $AM = M\Lambda$ , να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Gamma\Lambda = AE$ . (Μονάδες 10)
- β) Οι γωνίες  $A\Gamma\Lambda$  και  $EAH$  είναι ίσες. (Μονάδες 10)
- γ) Η προέκταση της  $MA$  (προς το  $A$ ) τέμνει κάθετα την  $E\Lambda$ . (Μονάδες 5)



Θέμα 1796.

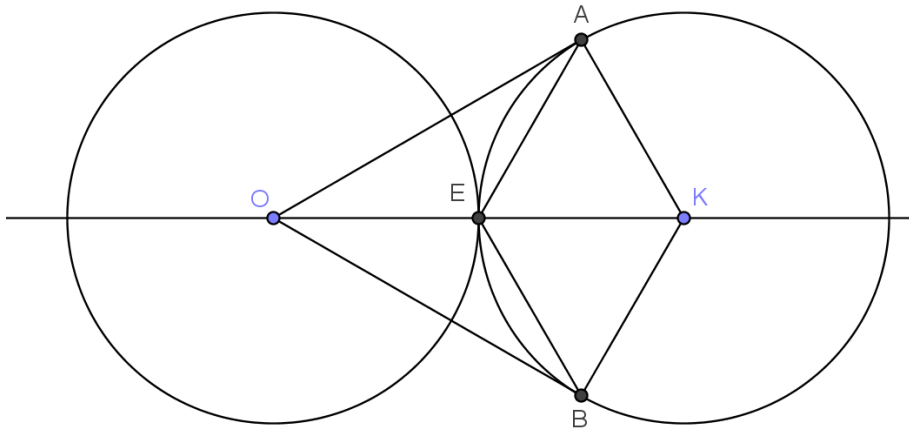
## ΘΕΜΑ 4

Δυο ίσοι κύκλοι  $(O, \rho)$  και  $(K, \rho)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $E$ . Αν  $OA$  και  $OB$  είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο  $O$  στον κύκλο  $(K, \rho)$  να αποδείξετε ότι:

α)  $AE = BE$ . (Μονάδες 9)

β)  $\hat{AOK} = 30^\circ$ . (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο  $AKBE$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



Θέμα 1797.

ΘΕΜΑ 4

α) Σε ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε  $K, \Lambda, M, N$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Lambda M N$  είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)

β) Σε ένα τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  τα μέσα  $K, \Lambda, M, N$  των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το  $AB\Gamma\Delta$  πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Θέμα 1798.

ΘΕΜΑ 4

α) Σε ρόμβο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε  $K, \Lambda, M, N$  τα μέσα των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $K\Lambda M N$  είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου είναι κορυφές ρόμβου.

(Μονάδες 12)

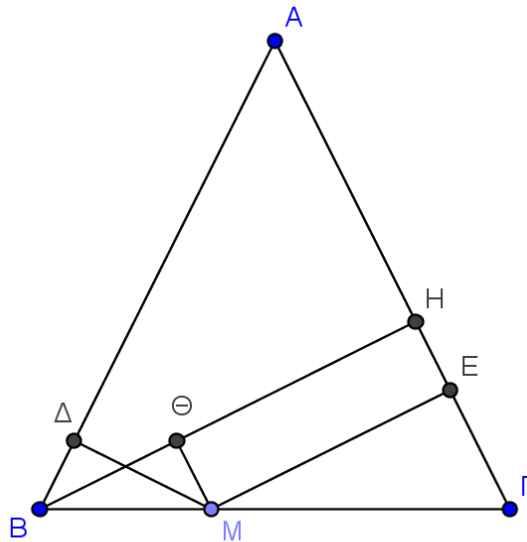
Θέμα 1800.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ , τυχαίο σημείο  $M$  της βάσης του  $B\Gamma$  και το ύψος του  $BH$ . Από το  $M$  φέρουμε κάθετες  $M\Delta$ ,  $ME$  και  $M\Theta$  στις  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $BH$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $MEH\Theta$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)
- β)  $B\Theta = \Delta M$  (Μονάδες 9)
- γ) Το άθροισμα  $M\Delta + ME = BH$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 1801.

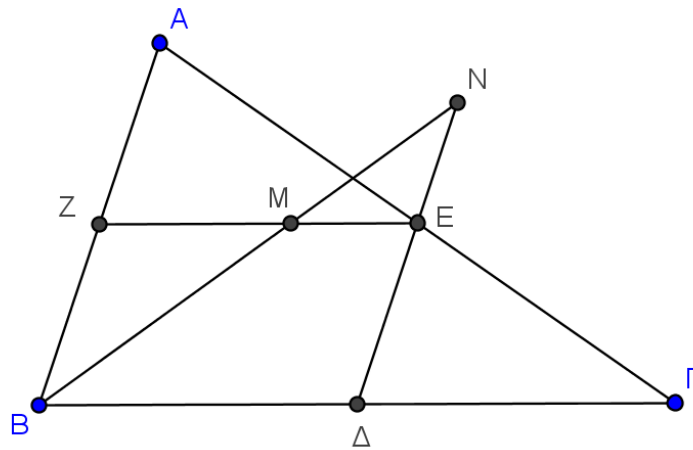
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A\Gamma > AB$  και  $\Delta, E, Z$  τα μέσα των πλευρών του  $B\Gamma, A\Gamma, AB$  αντίστοιχα. Αν η διχοτόμος της γωνίας  $B$  τέμνει την  $ZE$  στο σημείο  $M$  και την προέκταση της  $\Delta E$  στο σημείο  $N$ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $ZE\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Τα τρίγωνα  $BZM$  και  $MEN$  είναι ισοσκελή. (Μονάδες 10)

γ)  $BZ + NE = \Delta\Gamma$  (Μονάδες 8)



Θέμα 1802.

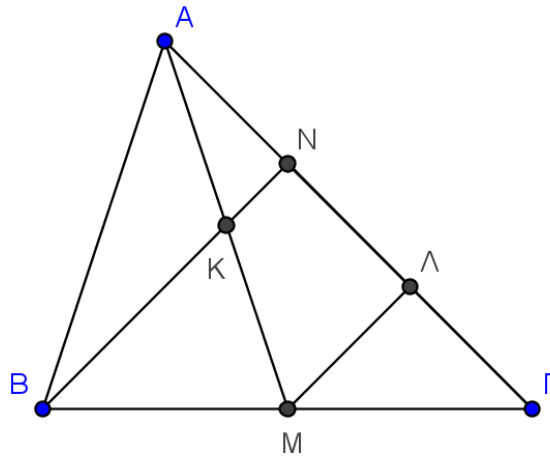
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $AM$  διάμεσός του και  $K$  το μέσο του  $AM$ . Αν η προέκταση της  $BK$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $N$ , και  $\Lambda$  είναι το μέσο του  $\Gamma N$ , να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο  $N$  είναι μέσο του  $A\Lambda$ . (Μονάδες 9)

β)  $\widehat{KM\Gamma} = \widehat{MBK} + \widehat{AKN}$  (Μονάδες 9)

γ)  $BK = 3KN$  (Μονάδες 7)



Θέμα 1803.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 2A\Gamma$ . Έστω  $AM$  διάμεσος του  $AB\Gamma$  και  $K, \Lambda$  τα μέσα των  $M\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{M\Lambda\Gamma} = \widehat{A\Lambda\Gamma}$

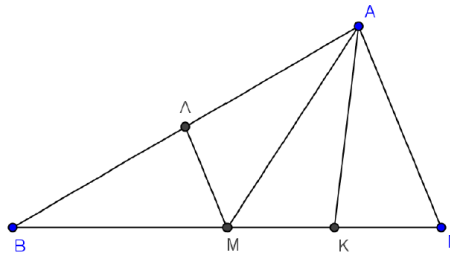
(Μονάδες 7)

β)  $M\Lambda = MK$ .

(Μονάδες 9)

γ) Η  $AM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Lambda MK$ .

(Μονάδες 9)



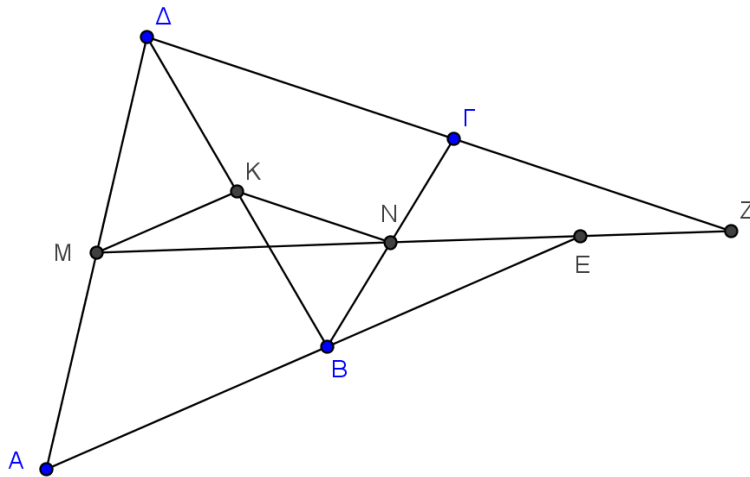
Θέμα 1804.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = \Gamma\Delta$  και  $M, N, K$  τα μέσα των  $AD, B\Gamma, BD$  αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  τέμνουν την προέκταση της  $MN$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

α)  $MK = KN$ . (Μονάδες 13)

β)  $\widehat{M\dot{E}A} = \widehat{M\dot{Z}\Delta}$ . (Μονάδες 12)



Θέμα 1805.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και στην προέκταση της  $A\Delta$  θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $\Delta E = \Delta\Gamma$  ενώ στην προέκταση της  $AB$  θεωρούμε σημείο  $Z$  τέτοιο ώστε  $BZ = B\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$ . (Μονάδες 10)

ii. τα σημεία  $Z, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

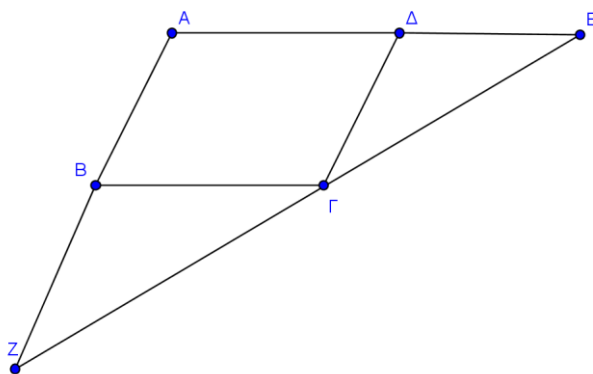
β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία  $Z, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. « Έχουμε:

$\hat{B}\hat{\Gamma}Z = \hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$  (ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  που τέμνονται από τη  $ZE$ ) και

$\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E$  (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  που τέμνονται από την  $\Delta\Gamma$ ).

Όμως  $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + \hat{\Gamma}\hat{\Delta}E + \hat{\Delta}\hat{\Gamma}\Delta = 180^\circ$  (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου  $\Delta\Gamma E$ ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα:  $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E + \hat{B}\hat{\Gamma}\Delta + \hat{B}\hat{\Gamma}Z = 180^\circ$ . Οπότε τα σημεία  $Z, \Gamma, E$  είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. (Μονάδες 5)



Θέμα 1806.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή. Φέρουμε τη διάμεσό του  $AM$  και σε τυχαίο σημείο  $K$  αυτής φέρουμε κάθετη στην  $AM$  η οποία τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Αν  $H$  είναι το μέσο του  $\Delta E$  να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{B} = \hat{BAM}$ . (Μονάδες 8)

β)  $\hat{A\Delta H} = \hat{\Delta AH}$ . (Μονάδες 9)

γ) Η ευθεία  $AH$  τέμνει κάθετα τη  $B\Gamma$ . (Μονάδες 8)

Θέμα 1808.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  με  $ΑΒ = ΑΓ$  και  $Δ, Ε$  τα μέσα των πλευρών του  $ΑΒ$  και  $ΑΓ$  αντίστοιχα. Στην προέκταση της  $ΔΕ$  (προς το  $Ε$ ) θεωρούμε σημείο  $Λ$  ώστε  $ΕΛ = ΑΕ$  και στην προέκταση της  $ΕΔ$  (προς το  $Δ$ ) θεωρούμε σημείο  $Κ$  τέτοιο ώστε  $ΔΚ = ΑΔ$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $ΚΔ = ΛΕ$ . (Μονάδες 6)
- β) Τα τρίγωνα  $ΑΚΒ$  και  $ΑΛΓ$  είναι ορθογώνια. (Μονάδες 9)
- γ) Τα τρίγωνα  $ΑΚΒ$  και  $ΑΛΓ$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)

Θέμα 1810.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  του  $B\Gamma$  φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα  $M\Delta$  ίσο και παράλληλο με το  $BA$  και ευθύγραμμο τμήμα  $ME$  ίσο και παράλληλο με το  $GA$  (τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη  $B\Gamma$  και το σημείο  $A$ ). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία  $\Delta, A, E$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου  $M\Delta E$  είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 9)

γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία  $\Delta, A, E$  είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

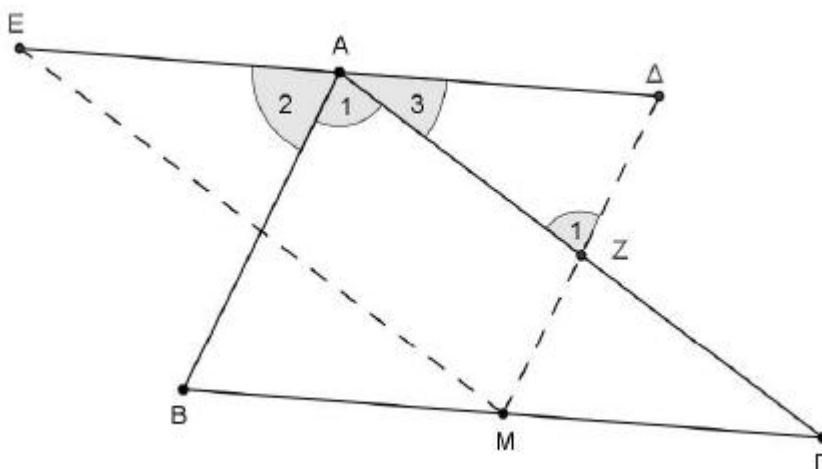
$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$  (εντός εναλλάξ των  $AB//M\Delta$  που τέμνονται από  $AZ$ )

$\hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} = \hat{A}_2$  (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των  $AB//M\Delta$  που τέμνονται από  $DE$ )

Όμως  $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}\hat{\Delta}\hat{Z} = 180^\circ$  (άθροισμα γωνιών του τριγώνου  $A\Delta Z$ ). Άρα σύμφωνα

με τα προηγούμενα έχουμε:  $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$ . Οπότε  $\Delta, E, A$  συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή; (Μονάδες 6)



Θέμα 1811.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες ( $\epsilon$ ) και ( $\zeta$ ), και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία A και B αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο Δ. Αν M είναι το μέσον του AB, να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία BΔA είναι ορθή.

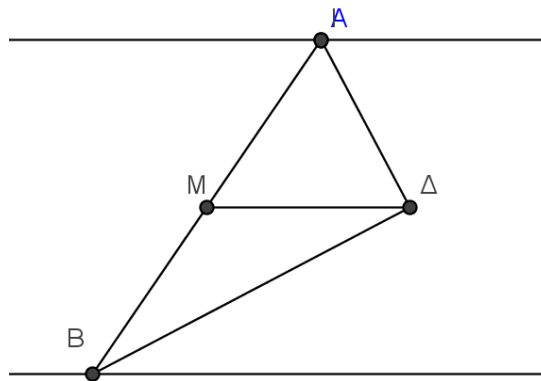
(Μονάδες 9)

β)  $\widehat{B\Delta A} = 2 \cdot \widehat{M\Delta A}$ 

(Μονάδες 8)

γ)  $M\Delta \parallel \epsilon$ 

(Μονάδες 8)



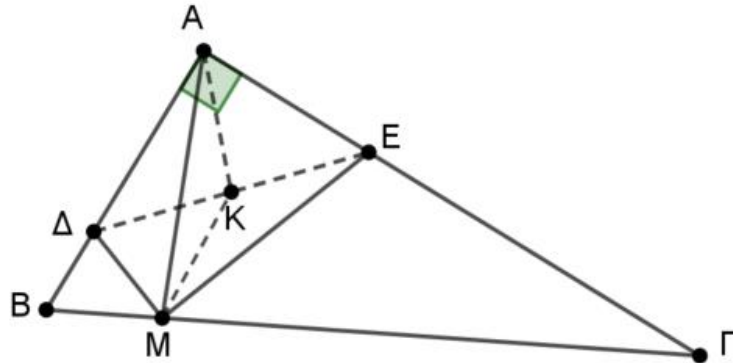
Θέμα 1812.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και  $M$  τυχαίο σημείο της πλευράς  $B\Gamma$ . Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών  $BMA$  και  $AM\Gamma$  οι οποίες τέμνουν τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι, η γωνία  $\widehat{\Delta M E}$  είναι ορθή. (Μονάδες 12)

β) Αν  $K$  το μέσο του  $\Delta E$ , να αποδείξετε ότι  $MK = KA$  (Μονάδες 13)



Θέμα 1814.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο ΜΒΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{\Delta} \hat{A} E = 15^\circ$ .

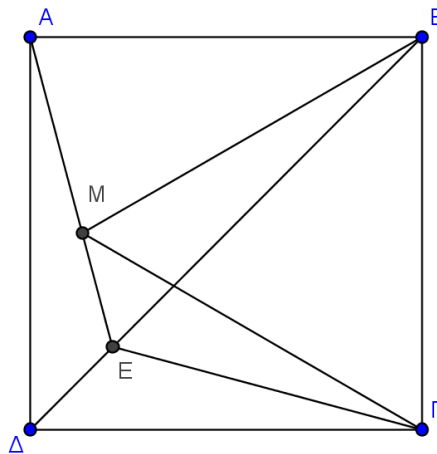
(Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα.

(Μονάδες 8)

γ) Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ.

(Μονάδες 9)

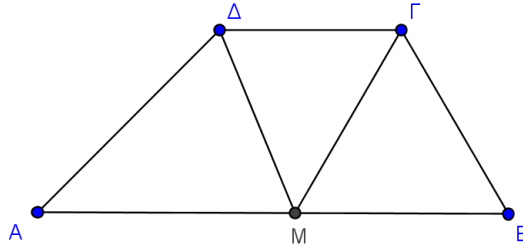


Θέμα 1815.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AB = A\Delta + B\Gamma$ . Αν η διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$  τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $M$ , να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $A\Delta M$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- β) Το τρίγωνο  $M\beta\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)
- γ) Η  $\Gamma M$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Gamma$  του τραpezίου. (Μονάδες 8)



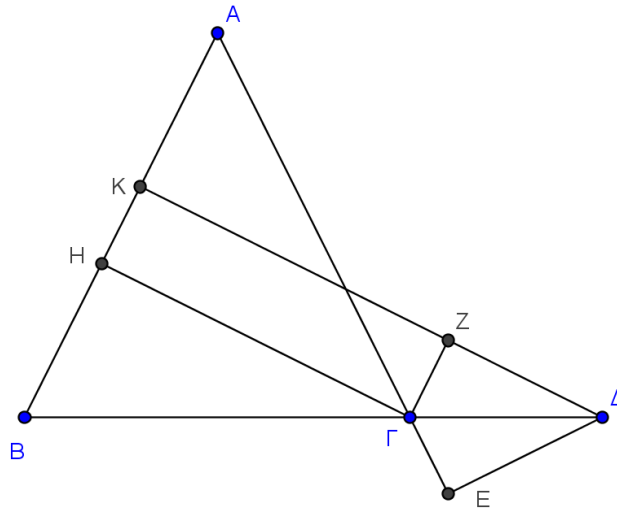
Θέμα 1816.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και σημείο  $\Delta$  στην προέκταση της  $B\Gamma$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta K$  κάθετη στην  $AB$  και  $\Delta E$  κάθετη στην προέκταση της  $A\Gamma$ . Από το σημείο  $\Gamma$  φέρουμε  $\Gamma H$  κάθετη στην  $AB$  και  $\Gamma Z$  κάθετη στην  $K\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία  $Z\Gamma\Delta$  είναι ίση με τη γωνία  $B$ . (Μονάδες 4)  
 β) Η  $\Gamma\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $Z\Gamma E$ . (Μονάδες 4)  
 γ) Το τρίγωνο  $\Delta ZE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)  
 δ)  $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$  (Μονάδες 8)



Θέμα 1818.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ , η διχοτόμος του  $A\Delta$  και ευθεία  $(\epsilon)$  παράλληλη από το  $B$  προς την  $A\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  φέρουμε ευθεία παράλληλη στην  $A\Delta$  η οποία τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $Z$ , την ευθεία  $(\epsilon)$  στο σημείο  $\Lambda$  και την προέκταση της  $BA$  στο σημείο  $E$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $AEZ$  και  $B\Lambda E$  είναι ισοσκελή.

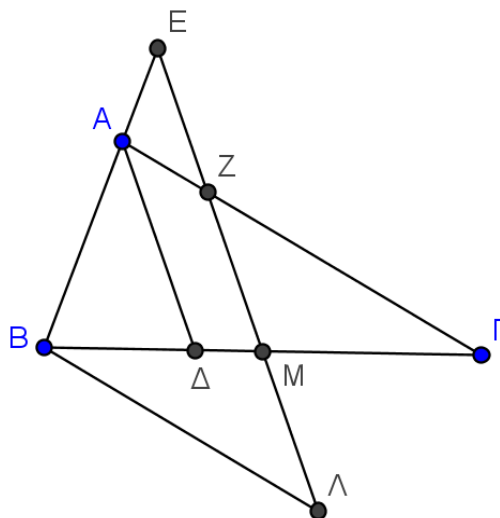
(Μονάδες 8)

β)  $B\Lambda = \Gamma Z$ .

(Μονάδες 9)

γ)  $AE = A\Gamma - B\Lambda$ .

(Μονάδες 8)

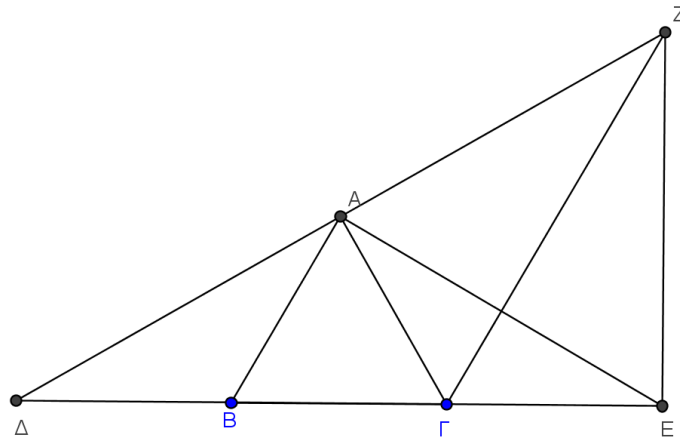


Θέμα 1819.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στην προέκταση της  $\Gamma B$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = B\Gamma$ , ενώ στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $\Gamma E = B\Gamma$ . Φέρουμε την κάθετη στην  $E\Delta$  στο σημείο  $E$ , η οποία τέμνει την προέκταση της  $\Delta A$  στο  $Z$ .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων  $\Gamma A E$  και  $B\Delta A$ . (Μονάδες 8)  
β) Να αποδείξετε ότι η  $\Gamma Z$  είναι μεσοκάθετος του  $A E$ . (Μονάδες 12)  
γ) Να αποδείξετε ότι  $AB \parallel \Gamma Z$ . (Μονάδες 5)



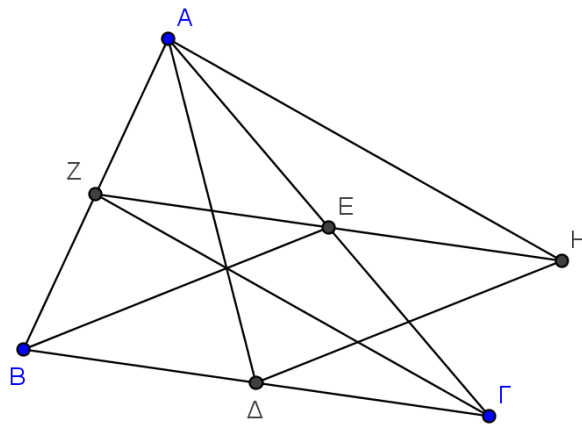
Θέμα 1820.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και οι διάμεσοί του  $AD$ ,  $BE$  και  $\Gamma Z$ . Προεκτείνουμε το τμήμα  $ZE$  (προς το  $E$ ) κατά τμήμα  $EH = ZE$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $E\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- β) Η περίμετρος του τριγώνου  $A\Delta H$  είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)
- γ) Οι ευθείες  $BE$  και  $\Delta H$  τριχοτομούν το τμήμα  $Z\Gamma$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 1821.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ) με  $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$  και  $K, \Lambda$  τα μέσα των  $B\Gamma$  και  $\Gamma\Delta$ . Η παράλληλη από το  $K$  προς την  $AB$  τέμνει την  $A\Lambda$  στο  $Z$ .

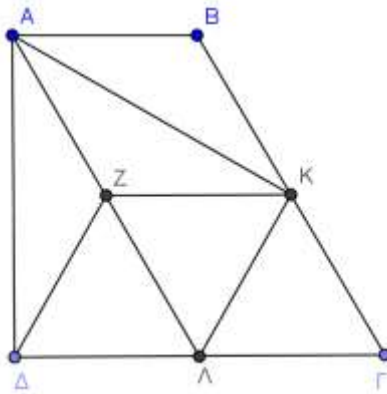
Να αποδείξετε ότι:

α) Το  $Z$  είναι μέσο του  $A\Lambda$ . (Μονάδες 6)

β)  $B\Gamma = 2 \Delta Z$ . (Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο  $ZK\Gamma\Lambda$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 5)

δ)  $\hat{A\hat{K}\Lambda} = 90^\circ$ . (Μονάδες 8)



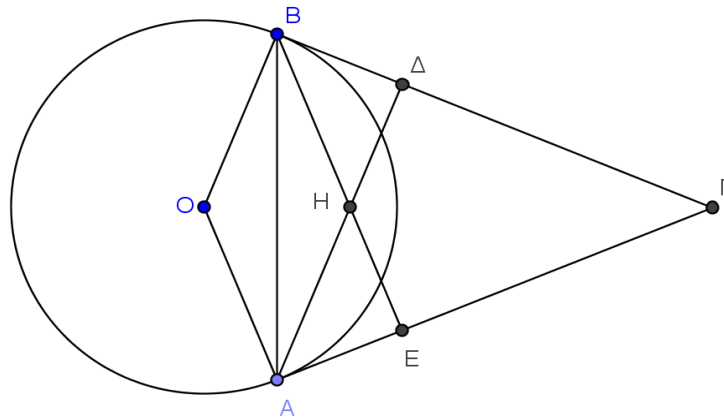
Θέμα 1823.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και δυο μη αντιδιαμετρικά σημεία του  $A$  και  $B$ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία  $A$  και  $B$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $\Gamma$ . Φέρουμε επίσης και τα ύψη  $AD$  και  $BE$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  τα οποία τέμνονται στο σημείο  $H$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $BHA$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- β) Το τετράπλευρο  $OBHA$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)
- γ) Τα σημεία  $O, H, \Gamma$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)



Θέμα 1824.

## ΘΕΜΑ 4

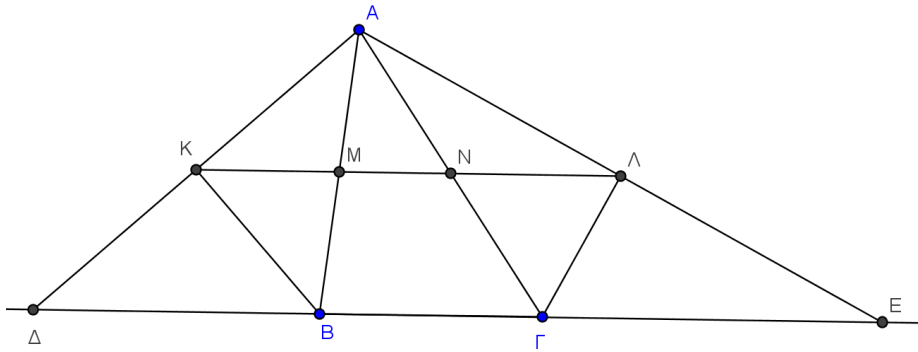
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στην προέκταση της  $\Gamma B$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = AB$  ενώ στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $\Gamma E = \Gamma A$ .

Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  τέμνουν τις  $A\Delta$  και  $AE$  στα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα, και η  $K\Lambda$  τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι μέσα των  $A\Delta$  και  $AE$  αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Τα τρίγωνα  $KMA$  και  $AN\Lambda$  είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)

γ)  $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$  (Μονάδες 8)



Θέμα 1825.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και τυχαίο σημείο  $E$  στην πλευρά  $\Delta\Gamma$ . Φέρουμε τη διχοτόμο  $AZ$  της γωνίας  $EAB$  και τη  $\Delta H$  κάθετη από το  $\Delta$  προς την  $AZ$ , η οποία τέμνει την  $AE$  στο  $M$  και την  $AB$  στο  $N$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $\Delta\Delta N$  και  $ABZ$  είναι ίσα.

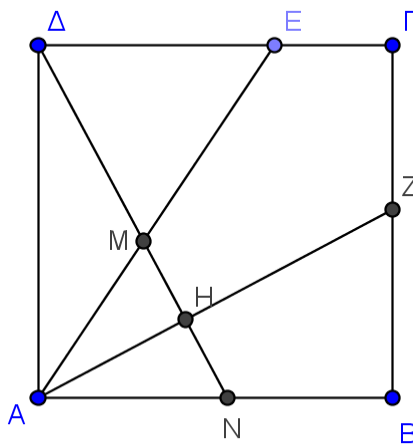
(Μονάδες 8)

β)  $AM=AN$  και  $\Delta E=EM$ .

(Μονάδες 10)

γ)  $AE=\Delta E+BZ$

(Μονάδες 7)



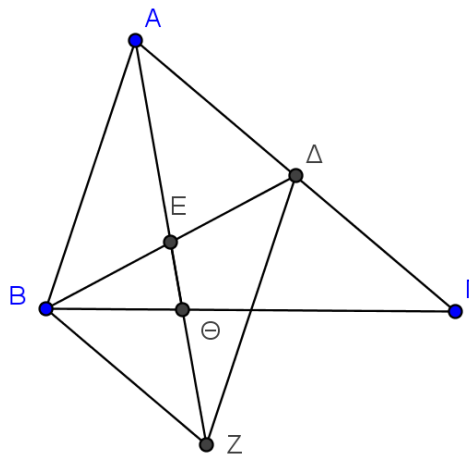
Θέμα 1827.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $E$  το μέσο της διαμέσου  $BD$ . Στην προέκταση της  $AE$  θεωρούμε σημείο  $Z$  τέτοιο ώστε  $EZ=AE$  και έστω  $\Theta$  το σημείο τομής της  $AZ$  με την πλευρά  $B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $ABZ\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)  
β) Το τετράπλευρο  $B\Delta\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)  
γ) Το σημείο  $\Theta$  είναι βαρύκεντρο του τριγώνου  $B\Delta Z$ . (Μονάδες 9)



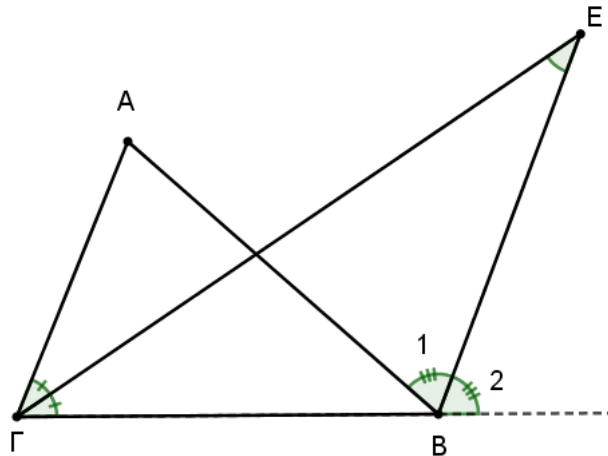
Θέμα 1851.

## ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  η προέκταση της διχοτόμου της  $\hat{\Gamma}$  και της εξωτερικής γωνίας του  $\hat{B}$ , τέμνονται στο  $E$ . Δίνεται ότι  $\hat{ABE} = 70^\circ = 2\hat{\Gamma EB}$

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Gamma BE$  είναι ισοσκελές (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\triangle AB\Gamma$ . (Μονάδες 13)

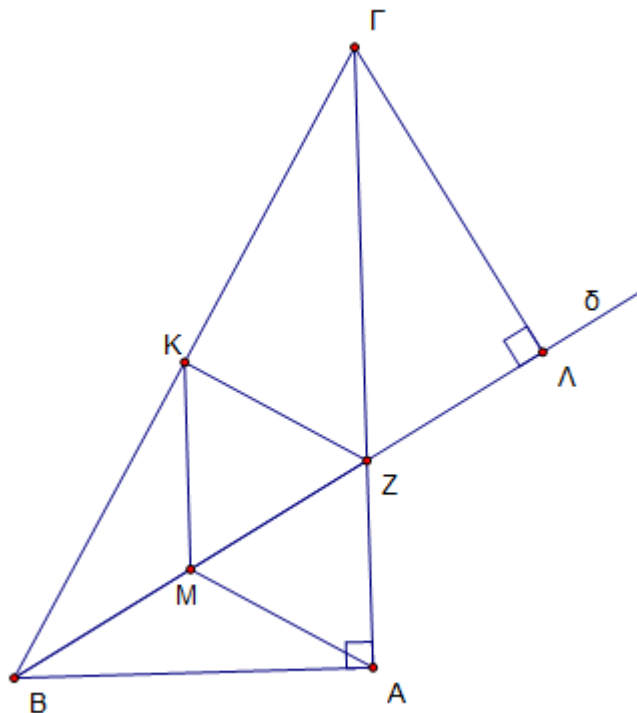


Θέμα 1872.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{B} = 60^\circ$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Τα σημεία  $M$  και  $K$  είναι τα μέσα των  $BZ$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Αν το τμήμα  $\Gamma\Lambda$  είναι κάθετο στη διχοτόμο  $B\delta$  να αποδείξετε:

- α) Το τρίγωνο  $\triangle BZ\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- β) Το τετράπλευρο  $AMKZ$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)
- γ)  $\Gamma Z = 2ZA$  (Μονάδες 7)
- δ)  $B\Lambda = A\Gamma$  (Μονάδες 6)



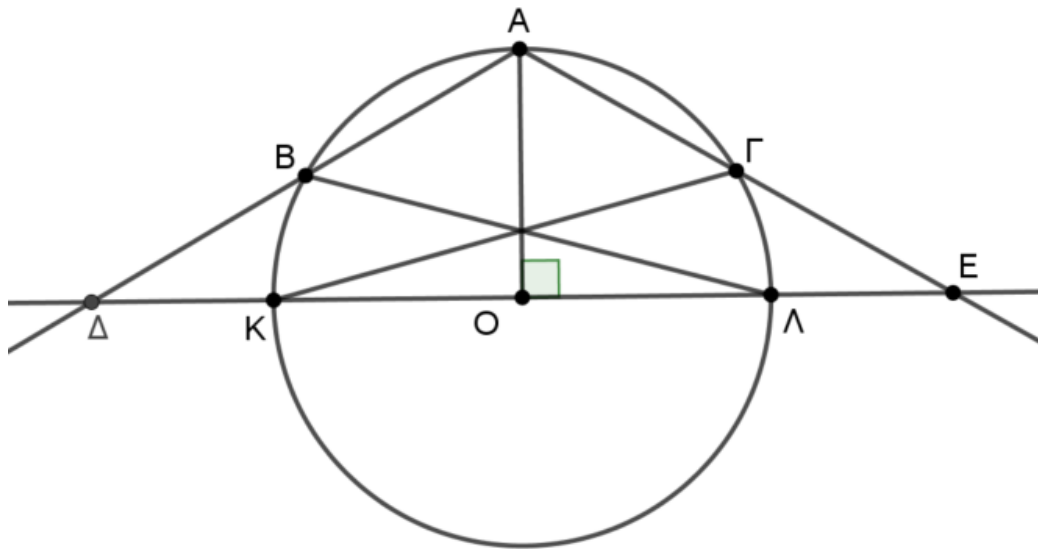
Θέμα 1874.

## ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και διάμετρο  $ΚΛ$ . Έστω  $A$  σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα  $OA$  να είναι κάθετη στην  $ΚΛ$ . Φέρουμε τις χορδές  $AB = AΓ = \rho$ . Έστω  $\Delta$  και  $E$  τα σημεία τομής των προεκτάσεων των  $AB$  και  $AΓ$  αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου  $ΚΛ$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία  $BAΓ$  είναι  $120^\circ$ . (Μονάδες 7)
- β) Τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  είναι μέσα των  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. (Μονάδες 9)
- γ)  $Κ\Gamma = \Lambda B$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 1875.

## ΘΕΜΑ 4

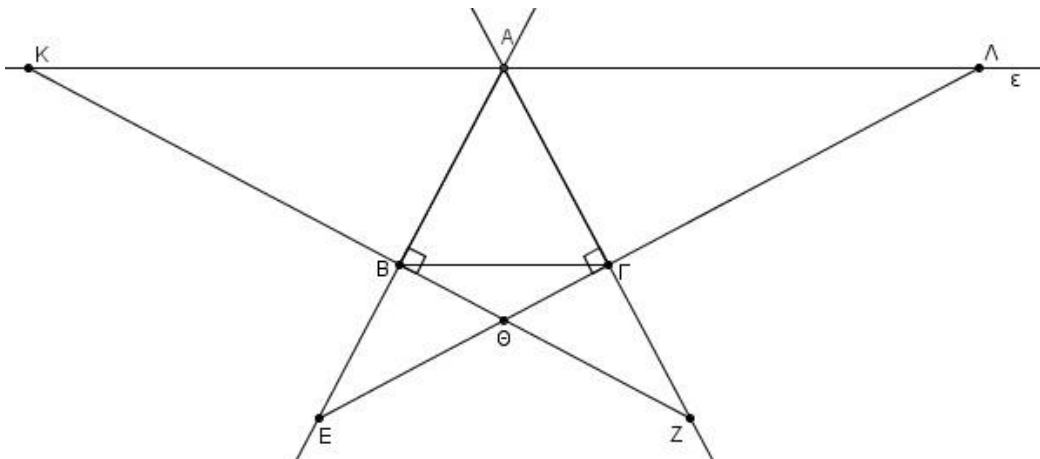
Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ), και την ευθεία  $\varepsilon$  της εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας  $A$ . Η κάθετη στην πλευρά  $AB$  στο  $B$  τέμνει την  $\varepsilon$  στο  $K$  και την ευθεία  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Η κάθετη στην πλευρά  $A\Gamma$  στο  $\Gamma$  τέμνει την  $\varepsilon$  στο  $\Lambda$  και την ευθεία  $AB$  στο  $E$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $AZ=AE$  (Μονάδες 8)

ii.  $AK=A\Lambda$  (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής κοιτώντας το σχήμα, διατύπωσε την άποψη ότι η  $A\Theta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , όπου  $\Theta$  το σημείο τομής των  $KZ$  και  $E\Lambda$ . Συμφωνείτε με την παραπάνω σκέψη του μαθητή ή όχι; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



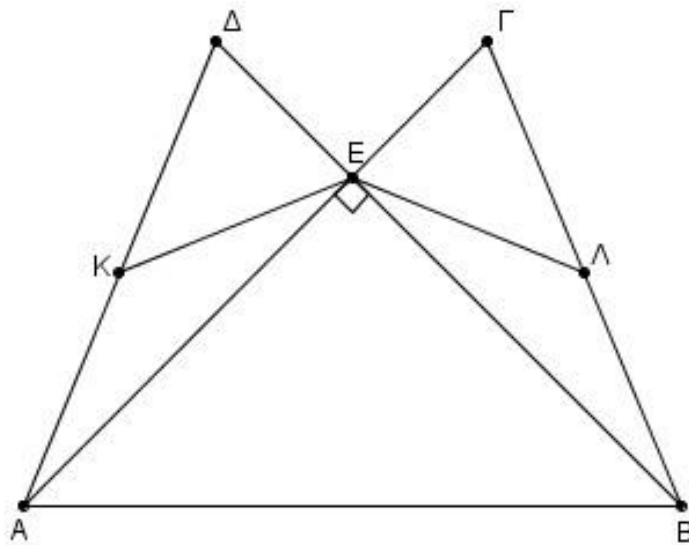
Θέμα 1876.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ) και  $AB\Delta$  ( $BA=B\Delta$ ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  να τέμνονται κάθετα στο σημείο  $E$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των τμημάτων  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $EA=EB$ . (Μονάδες 7)
- β)  $\Delta\Gamma \parallel AB$ . (Μονάδες 8)
- γ) Το τρίγωνο  $EKL$  είναι ισοσκελές και  $KL \parallel AB$ . (Μονάδες 10)



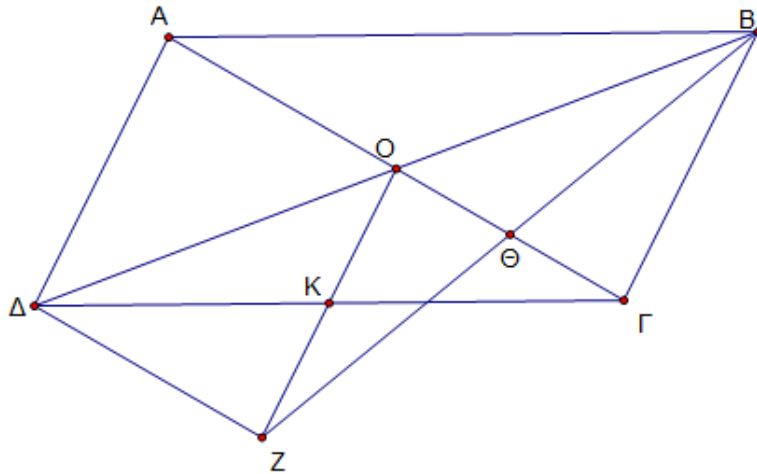
Θέμα 1877.

ΘΕΜΑ 4

Έστω παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του και  $K$  το μέσο του  $\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε το τμήμα  $OK$  κατά τμήμα  $KZ = KO$ . Η  $BZ$  τέμνει τη διαγώνιο  $A\Gamma$  στο  $\Theta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα  $O\Gamma$  και  $BZ$  διχοτομούνται. (Μονάδες 8)
- β)  $AO = \Delta Z$  . (Μονάδες 9)
- γ) Τα τρίγωνα  $\triangle AOB$  και  $\triangle Z\Gamma$  είναι ίσα. (Μονάδες 8)



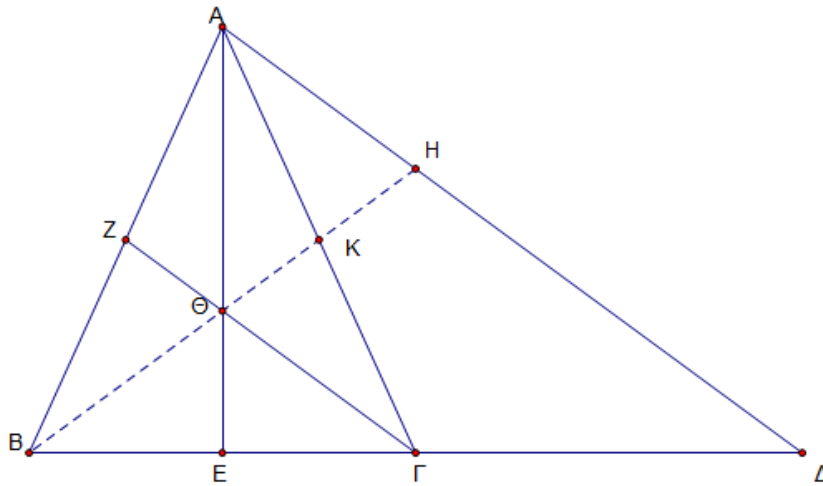
Θέμα 1878.

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Προεκτείνουμε το  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) κατά τμήμα  $\Gamma\Delta = B\Gamma$ . Φέρουμε τις διαμέσους  $AE$  και  $\Gamma Z$  του τριγώνου  $\triangle AB\Gamma$  που τέμνονται στο  $\Theta$ . Το  $B\Theta$  προεκτεινόμενο, τέμνει το  $A\Gamma$  στο  $K$  και το  $A\Delta$  στο  $H$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το  $ZK\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- β)  $AH = \Theta\Gamma$ . (Μονάδες 9)
- γ)  $AH = 2Z\Theta$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 1879.

ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και διάμετρο  $AB$ . Φέρνουμε χορδή  $\Gamma\Delta \parallel AB$  με  $K$  το μέσο της. Από το  $\Delta$  φέρνουμε το τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στη  $\Delta\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $KGOE$  είναι παραλληλόγραμμο.

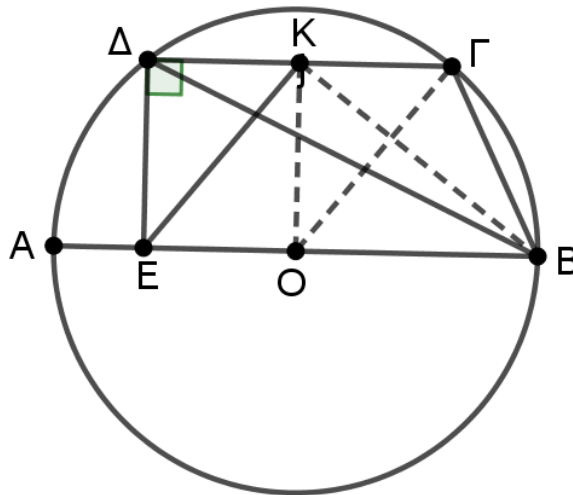
(Μονάδες 8)

β)  $\hat{\Delta EK} = \frac{\hat{\Delta O\Gamma}}{2}$ .

(Μονάδες 12)

γ)  $KE < KB$ .

(Μονάδες 5)



Θέμα 1893.

## ΘΕΜΑ 4

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο με  $AB > BC$  τέτοιο ώστε οι διαγώνιοί του να σχηματίζουν γωνία  $60^\circ$ . Από το Δ φέρουμε ΔΜ κάθετη στην ΑΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το σημείο Μ είναι μέσο του ΑΟ όπου Ο το κέντρο του ορθογωνίου.

(Μονάδες 8)

ii.  $AM = \frac{1}{4} AG$

(Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε ΓΝ κάθετη στη ΒΔ, να αποδείξετε ότι το ΜΝΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)

Θέμα 1894.

ΘΕΜΑ 4

Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) φέρουμε τη διχοτόμο του  $AD$ . Έστω  $\Delta K$  και  $\Delta P$  οι προβολές του  $\Delta$  στις  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Η κάθετη της  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο  $E$  και την προέκταση της πλευράς  $AB$  (προς το  $B$ ) στο σημείο  $Z$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\hat{B} = \hat{\Delta E\Gamma}$

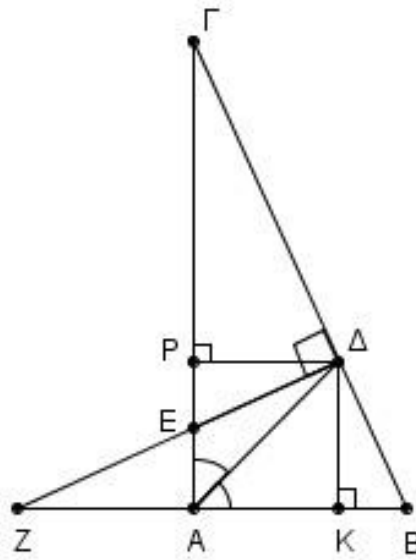
(Μονάδες 8)

ii.  $\Delta E = \Delta B$

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Delta\Gamma Z$

(Μονάδες 9)



## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΓΒ$  ( $ΑΓ=ΓΒ$ ). Φέρουμε τα ύψη του  $ΑΚ$  και  $ΓΛ$ . Αν  $Ε$  είναι το μέσο της πλευράς  $ΑΓ$ , να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $ΚΕΛ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

β) Η  $ΚΛ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $ΒΚΕ$ . (Μονάδες 15)

Θέμα 1898.

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσός του  $AD$ . Έστω  $E$ ,  $Z$  και  $H$  είναι τα μέσα των  $BD$ ,  $AD$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta EZH$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τη σχέση των πλευρών  $AB$  και  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , ώστε το παραλληλόγραμμο  $\Delta EZH$  να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)
- γ) Στην περίπτωση που το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο (η γωνία  $B$  ορθή), να βρείτε το είδος του παραλληλογράμμου  $\Delta EZH$ . (Μονάδες 5)

Θέμα 11882

Θέμα 3

Στο παρακάτω σχήμα τα τρίγωνα  $AB\Gamma$ ,  $A\Delta E$  και  $\Delta ZH$  είναι ορθογώνια με ορθές γωνίες  $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$ ,  $\widehat{A\hat{E}\Delta}$  και  $\widehat{\Delta\hat{Z}H}$ , αντίστοιχα. Επίσης  $A\Gamma = A\Delta$  και  $B\Gamma = \Delta Z$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα ευθύγραμμα τμήματα  $B\Gamma$  και  $\Delta E$  είναι ίσα.

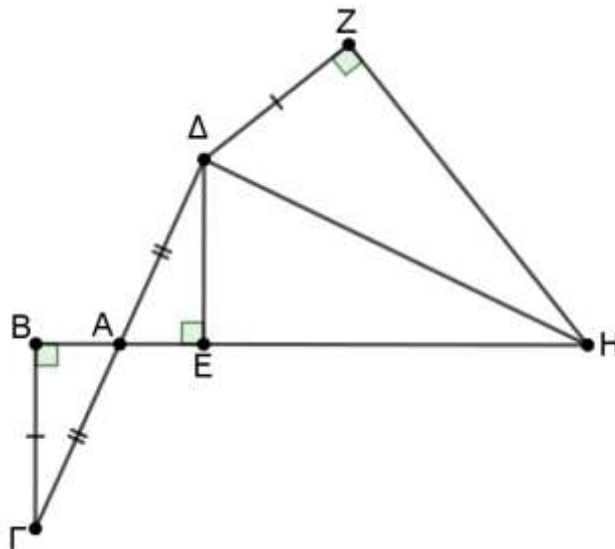
Μονάδες 10

β) Η  $\Delta H$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{E\hat{H}Z}$ .

Μονάδες 6

γ) Αν, επιπλέον, οι  $A\Delta$  και  $\Delta H$  είναι κάθετες, τότε  $\widehat{A\hat{\Delta}E} = \frac{\widehat{E\hat{H}Z}}{2}$ .

Μονάδες 9



Θέμα 11896

ΘΕΜΑ 3

Στο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος ισχύει ότι  $A\Delta = B\Gamma$  και τα σημεία  $E, Z, H$  και  $\Theta$  είναι τα μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων  $AB, A\Gamma, \Gamma\Delta$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα.

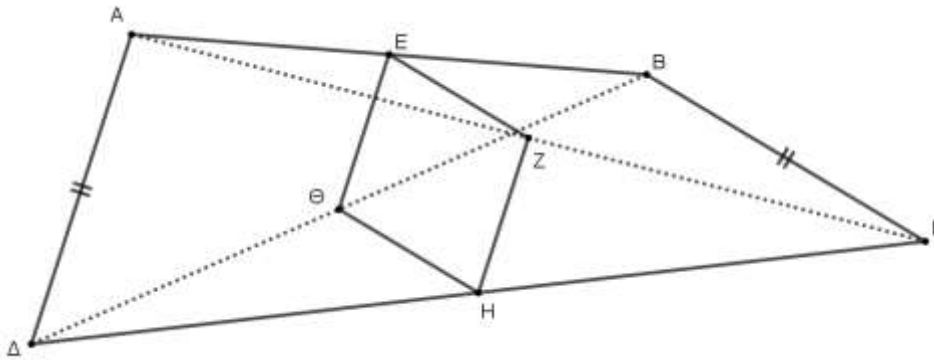
Να δείξετε ότι:

α.  $EZ \parallel H\Theta$

Μονάδες 15

β. Το τετράπλευρο  $EZH\Theta$  είναι ρόμβος.

Μονάδες 10



Θέμα 11897

## ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσος του  $AM$ . Στην προέκταση της  $A\Gamma$  προς το  $\Gamma$  παίρνουμε τμήμα  $\Gamma\Delta = A\Gamma$ . Από το  $\Delta$  φέρνουμε παράλληλη προς την  $AM$  που τέμνει την προέκταση της  $B\Gamma$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α)  $M\Gamma = \Gamma E$ . (Μονάδες 9)
- β) Το τετράπλευρο  $AM\Delta E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)
- γ)  $\widehat{B} + \widehat{B\hat{A}M} = \widehat{\Gamma\hat{E}\Delta}$ . (Μονάδες 9)

Θέμα 12068

## ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A}=90^\circ$ ) και  $M$  το μέσο της υποτείνουσας του  $B\Gamma$ .

Από το  $M$  φέρουμε  $M\Delta \perp AB$  και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα  $\Delta Z$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο  $MBZ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- ii. Το τετράπλευρο  $AMBZ$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

β) Αν το αρχικό τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τι είδους τετράπλευρο είναι το  $AMBZ$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

Θέμα 12069

## ΘΕΜΑ 3

Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) παίρνουμε στην πλευρά  $AB$  σημείο  $\Delta$ , ώστε  $\Delta B = 2\Delta A$ , και στην πλευρά  $A\Gamma$  σημείο  $E$ , ώστε  $E\Gamma = 2AE$ . Το  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τμήματα  $\Delta B$  και  $E\Gamma$  είναι ίσα. (Μονάδες 6)
- ii. Το τρίγωνο  $M\Delta E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Αν  $P$  το σημείο τομής των τμημάτων  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  να δείξετε ότι:

- i. Οι γωνίες  $\widehat{B\Gamma E}$  και  $\widehat{B\Gamma\Delta}$  είναι ίσες. (Μονάδες 6)
- ii. Το τμήμα  $PM$  διχοτομεί τη γωνία  $B\widehat{P}\Gamma$ . (Μονάδες 7)

Θέμα 12149

## ΘΕΜΑ 2

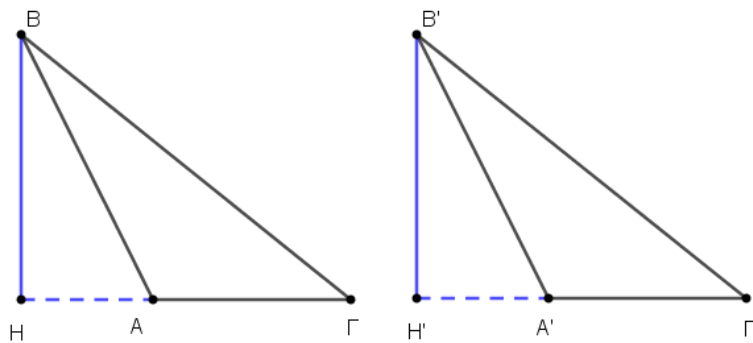
Δίνονται τα αμβλυγώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} > 90^\circ$ ) και  $A'B'\Gamma'$  ( $\widehat{A}' > 90^\circ$ ) με  $\gamma = \gamma'$  και  $\beta = \beta'$ . Αν τα ύψη  $BH$  και  $B'H'$  των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  αντίστοιχα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι:

α)  $B\widehat{A}H = B'\widehat{A}'H'$ .

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.

(Μονάδες 12)



Θέμα 12165

## ΘΕΜΑ 3

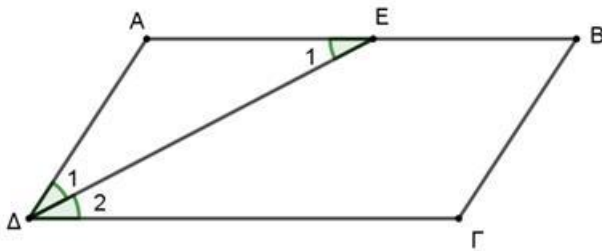
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = 120^\circ$  και η διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$  που τέμνει την  $AB$  στο μέσο της  $E$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $AB = 2AD$ . (Μονάδες 6)

β) Αν το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από το σημείο  $E$  στην  $\Gamma\Delta$  την τέμνει στο  $H$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\frac{\Delta E}{HE} = 2$ . (Μονάδες 7)

γ) Αν  $M$  το μέσο της  $\Gamma\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $MA\Delta$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι  $\hat{\Delta A\Gamma} = 90^\circ$ . (Μονάδες 6)



Θέμα 12200

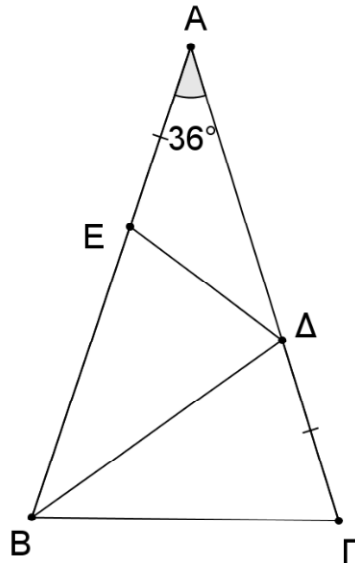
## ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\hat{A} = 36^\circ$ . Έστω  $B\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  και  $E$  σημείο της πλευράς  $AB$  ώστε  $AE = \Gamma\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = B\Delta$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

γ) Η παράλληλη από το  $B$  προς την  $A\Gamma$  τέμνει την προέκταση της  $DE$  (προς το  $E$ ) στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta Z$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



Θέμα 12417

## ΘΕΜΑ 2

Έστω δύο κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, r)$ , με  $R=3$ ,  $r=2$  και  $K\Lambda=4$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Οι κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, r)$  τέμνονται σε δύο σημεία, έστω  $A$  και  $B$ .

(Μονάδες 15)

β)  $\widehat{K\Lambda} > \widehat{A\Lambda K}$ .

(Μονάδες 10)

Θέμα 12418

## ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ) με  $ΑΒ > ΓΔ$ . Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τραpezίου  $ΑΒΓΔ$  ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΕ$  με βάση  $ΑΒ$ . Αν  $Μ$  είναι το μέσο της βάσης  $ΓΔ$ , να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $ΑΕΔ$  και  $ΒΕΓ$  είναι ίσα.

(Μονάδες 11)

β) Η διάμεσος  $ΕΜ$  του τριγώνου  $ΕΔΓ$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $Α\hat{E}Β$ .

(Μονάδες 14)

Θέμα 12635

## Θέμα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$  και  $M$  είναι το μέσο της βάσης του  $B\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$ ,  $AG$  προς τα  $B, \Gamma$  αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  ώστε  $B\Delta=\Gamma E$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $MB\Delta$  και  $M\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $M\Delta E$  είναι ίση με τη γωνία  $ME\Delta$ . (Μονάδες 10)

Θέμα 12636

Θέμα 2

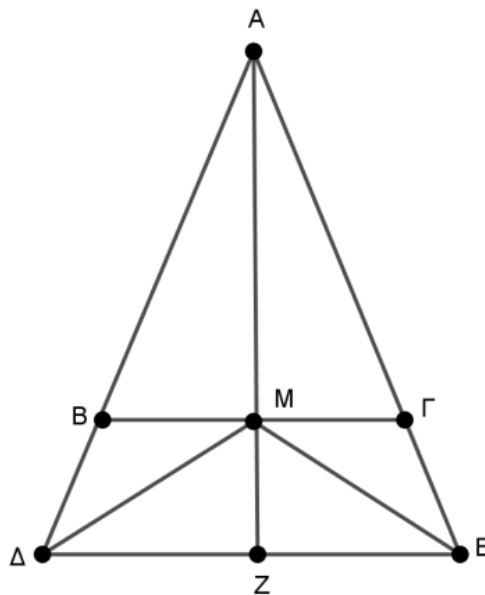
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=A\Gamma$  και  $M$  είναι το μέσο της βάσης  $B\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$ ,  $A\Gamma$  παίρνουμε τα τμήματα  $B\Delta$ ,  $\Gamma E$  αντίστοιχα ώστε  $B\Delta=\Gamma E$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $M\Delta B$  και  $M\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $M\Delta E$  είναι ίση με τη γωνία  $M\epsilon\Delta$ . (Μονάδες 6)

γ) Αν η  $AM$  τέμνει την  $\Delta E$  στο σημείο  $Z$  να αποδείξετε ότι η  $AZ$  είναι κάθετη στην  $\Delta E$ .

(Μονάδες 7)



Θέμα 12639

Θέμα 2

Από το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ, φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε. Αν η παράλληλη από το Δ στην ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α) το Ζ είναι μέσο της ΑΓ. (Μονάδες 10)

β) το ΑΕ ισούται με το  $\frac{1}{4}$  του ΑΓ. (Μονάδες 15)

Θέμα 12640

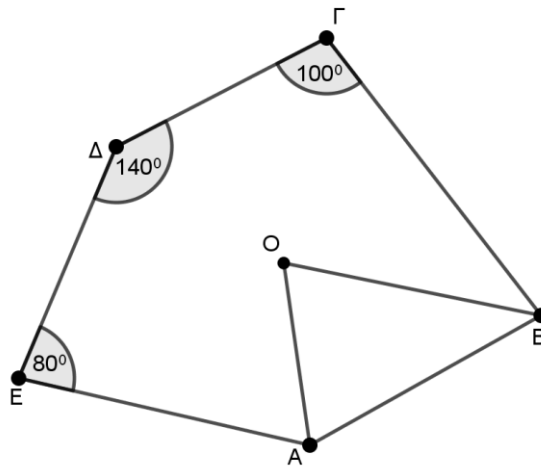
Θέμα 2

Στο κυρτό πολύγωνο ΑΒΓΔΕ, οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο.

Αν η γωνία του Γ ισούται με  $100^\circ$ , η γωνία του Δ ισούται με  $140^\circ$  και η γωνία του Ε ισούται με  $80^\circ$  τότε, να υπολογίσετε:

α) το μέτρο του αθροίσματος  $\hat{A} + \hat{B}$ . (Μονάδες 12)

β) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 13)

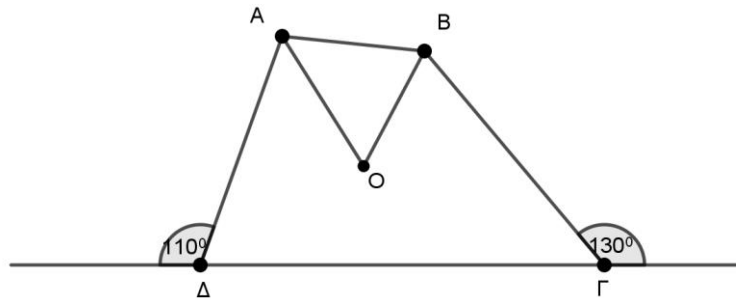


Θέμα 12644

Θέμα 2

Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ, η εξωτερική γωνία της Γ, ισούται με  $130^\circ$  και η εξωτερική γωνία της Δ ισούται με  $110^\circ$ . Αν οι διχοτόμοι των γωνιών του Α και Β τέμνονται στο Ο τότε, να υπολογίσετε:

- α) τα μέτρα των γωνιών Γ και Δ του τετραπλεύρου. (Μονάδες 9)  
β) το μέτρο του αθροίσματος  $\widehat{A} + \widehat{B}$ . (Μονάδες 9)  
γ) το μέτρο της γωνίας ΑΟΒ. (Μονάδες 7)



Θέμα 12704

## ΘΕΜΑ 2

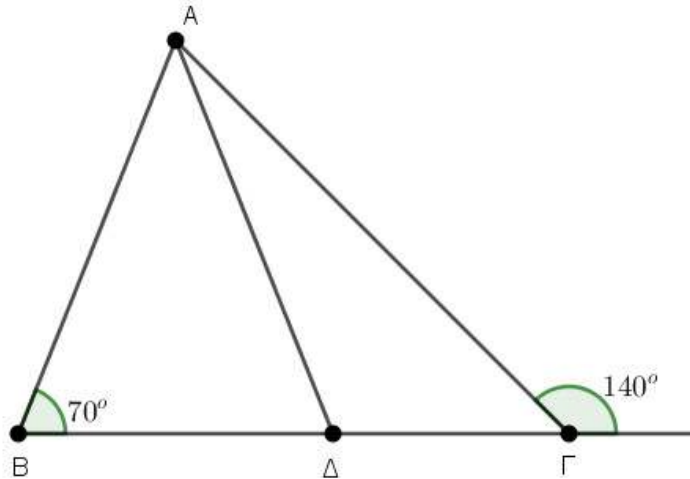
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{B}=70^\circ$  και  $\widehat{\Gamma}_{\text{εξωτ}}=140^\circ$ .

Στην πλευρά  $B\Gamma$  θεωρούμε εσωτερικό σημείο  $\Delta$ , ώστε  $A\Delta = AB$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{B\Delta A}=40^\circ$ . (Μονάδες 9)

β)  $\widehat{A\Delta\Gamma} = 110^\circ$ . (Μονάδες 7)

γ) Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)



Θέμα 12705

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  τέτοιο, ώστε  $A\Gamma = 2AB$ . Η διχοτόμος του  $A\Delta$  τέμνει την διάμεσο  $BE$  στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}.$$

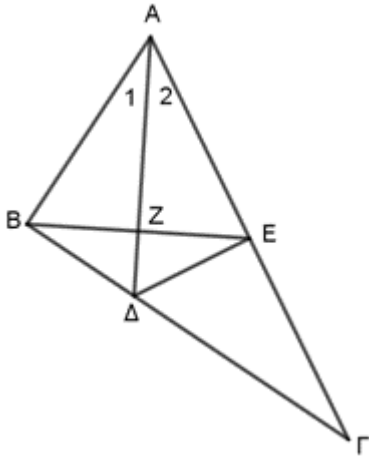
(Μονάδες 7)

$$\beta) \Delta B = \Delta E.$$

(Μονάδες 8)

$$\gamma) AZ \perp BE$$

(Μονάδες 10)

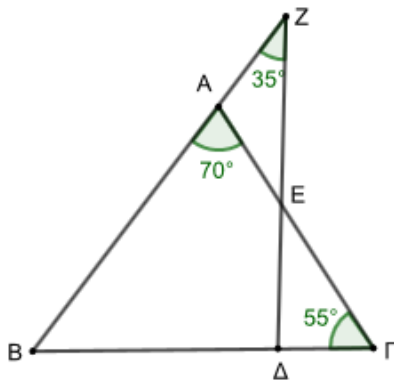


Θέμα 12707

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=70^\circ$  και  $\hat{\Gamma}=55^\circ$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $BA$  προς το σημείο  $A$  και παίρνουμε στην προέκταση σημείο  $Z$  ώστε  $\hat{BZ\Delta}=35^\circ$ , όπου  $\Delta$  εσωτερικό σημείο της  $B\Gamma$ . Η  $Z\Delta$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)  
β)  $\hat{Z\Delta B}=90^\circ$ . (Μονάδες 8)  
γ) το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



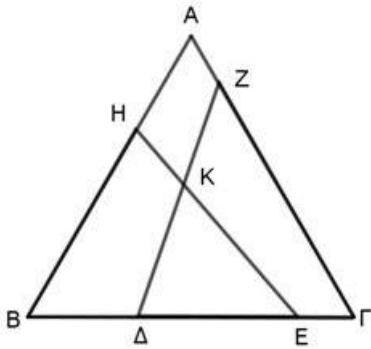
Θέμα 12708

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στις πλευρές  $B\Gamma$  και  $GA$  θεωρούμε σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα ώστε  $BE = \Gamma Z$ . Στις πλευρές  $AB$  και  $GB$  θεωρούμε σημεία  $H$  και  $\Delta$  αντίστοιχα ώστε  $BH = \Gamma\Delta$ . Τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Delta Z$  και  $E\text{H}$  τέμνονται στο σημείο  $K$  το οποίο είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $E\text{H} = \Delta Z$  και  $\widehat{B\text{H}E} = \widehat{\Gamma\Delta Z}$ . (Μονάδες 12)

β) τα τρίγωνα  $BE\text{H}$  και  $KE\Delta$  έχουν ίσες γωνίες μία προς μία. (Μονάδες 13)

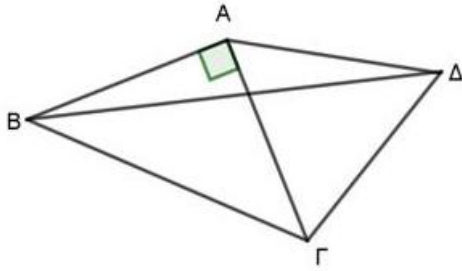


Θέμα 12709

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\widehat{A} = 90^\circ$ . Εξωτερικά του τριγώνου  $AB\Gamma$  κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$ .

- α) Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών  $B, \Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 5)  
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)  
γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $AB\Delta$ . (Μονάδες 12)



Θέμα 12710

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος του  $BE$ . Εξωτερικά του τριγώνου  $AB\Gamma$  κατασκευάζουμε το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$  με υποτείνουσα τη  $\Gamma\Delta$  έτσι, ώστε τα σημεία  $B$  και  $\Delta$  να βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας  $A\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $BE \parallel A\Delta$ .

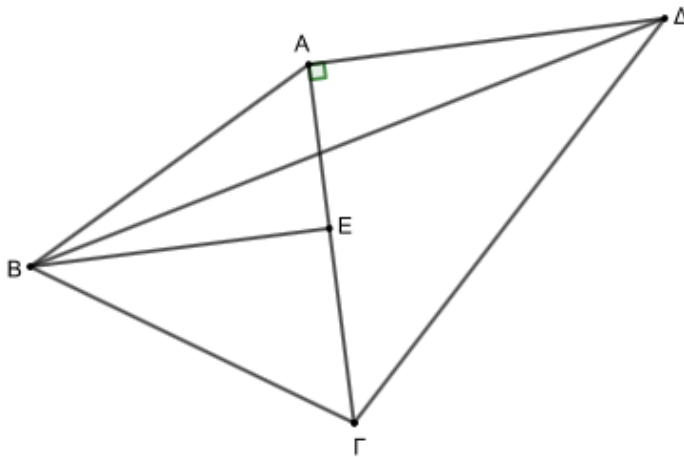
(Μονάδες 10)

β) οι γωνίες  $EB\Delta$  και  $A\Delta B$  είναι ίσες.

(Μονάδες 7)

γ) το τρίγωνο  $BA\Delta$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)



Θέμα 13442

## ΘΕΜΑ 2

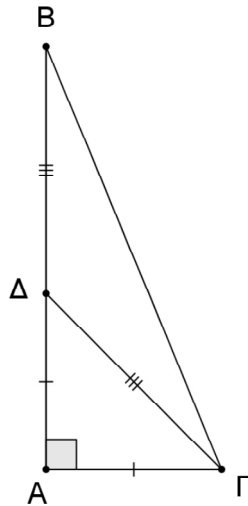
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ . Στην πλευρά του  $AB$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $B\Delta = \Delta\Gamma$  και  $A\Delta = A\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\hat{A\Delta\Gamma} = 45^\circ$ .

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{B}$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 13443

## ΘΕΜΑ 2

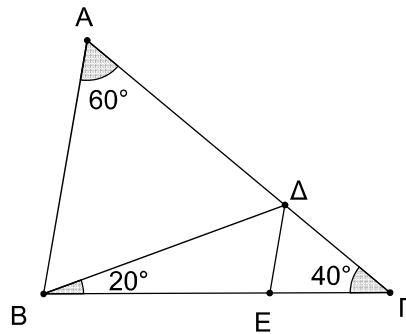
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 60^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 40^\circ$ . Στην πλευρά  $A\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$ ,  
ώστε  $\hat{B}\Delta = 20^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 10)

β) Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

i.  $\hat{B}\hat{\Delta}E = 60^\circ$ . (Μονάδες 8)

ii. Η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}\hat{\Delta}\Gamma$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 13497

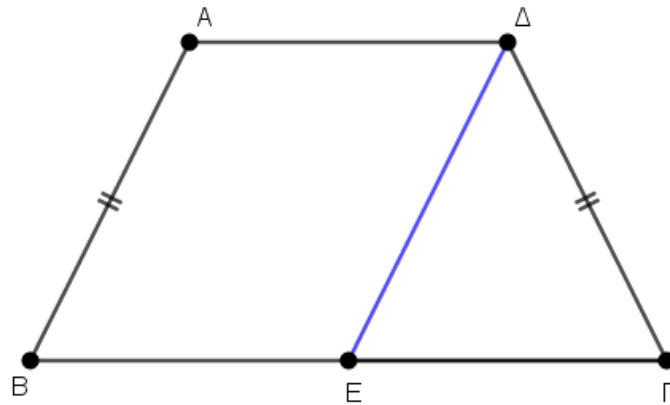
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $A\Delta // B\Gamma$ ) με  $B\Gamma > \Delta\Gamma$ .

Στην πλευρά  $B\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $E$ , τέτοιο ώστε  $\Gamma E = \Gamma\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της  $A\hat{\Delta}\Gamma$ . (Μονάδες 12)

β) Αν  $\hat{A} = 120^\circ$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)



Θέμα 13499

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) με  $AB < A\Gamma$  και  $AH$  το ύψος προς την υποτείνουσα. Στην πλευρά  $B\Gamma$  θεωρούμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  τέτοια ώστε  $\Delta B = AB$  και  $\Gamma E = \Gamma A$ . Αν  $\Delta Z$  και  $E\Theta$  είναι οι αποστάσεις των  $\Delta$  και  $E$  από τις πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{\Gamma\Delta\Lambda} = \widehat{\Delta\Lambda H}$  και  $\widehat{E\Lambda B} = \widehat{H\Lambda E}$ .

(Μονάδες 14)

β)  $\Delta E = \Delta Z + E\Theta$ .

(Μονάδες 11)

Θέμα 13517

ΘΕΜΑ 3

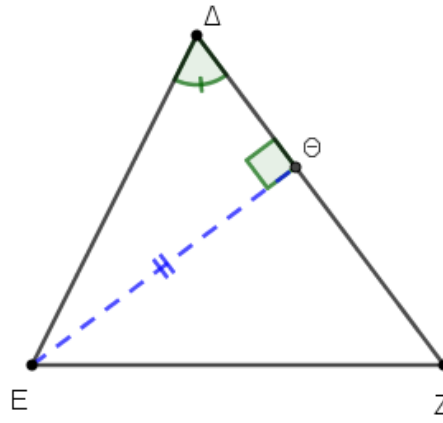
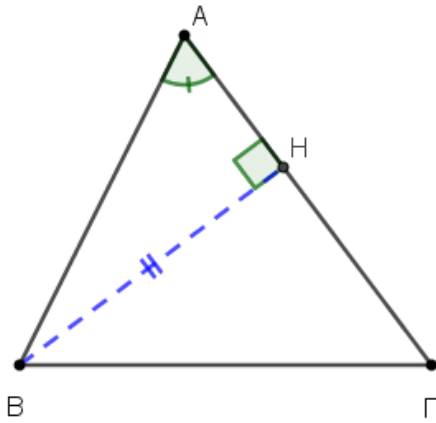
Δίνονται δύο οξυγώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  με  $\widehat{A}=\widehat{\Delta}$ ,  $\widehat{B\Gamma} = \widehat{\Delta Z}$ . Αν τα ύψη τους  $BH$  και  $E\Theta$  είναι ίσα τότε να αποδείξετε ότι:

α)  $AB = \Delta E$ .

(Μονάδες 13)

β) Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα .

(Μονάδες 12)



Θέμα 13518

## ΘΕΜΑ 2

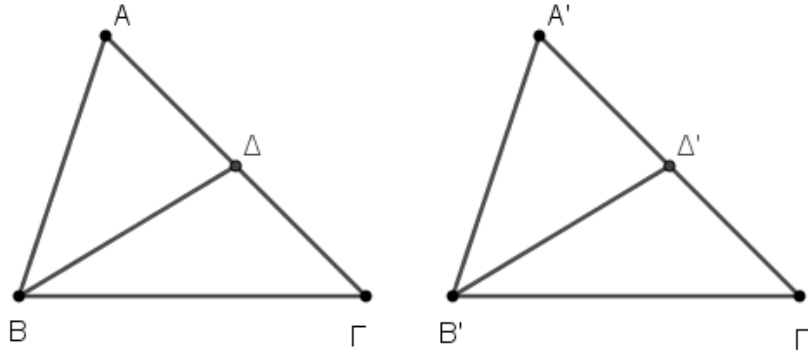
Δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  του σχήματος με  $A\Gamma = A'\Gamma'$  και  $AB = A'B'$ . Αν οι διάμεσοι  $B\Delta$  και  $B'\Delta'$  είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{A} = \widehat{A}'$

(Μονάδες 15)

β) Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.

(Μονάδες 10)



Θέμα 13519

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  με  $AB > AD$ . Στην  $AB$  θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο, ώστε  $AE = AD$ . Από το μέσο  $M$  της  $DE$  φέρουμε παράλληλη προς την  $ΔΓ$  που τέμνει την  $BΓ$  στο  $K$ .

- α) Να αποδείξετε  $AM \perp DE$ . (Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι  $2MK = 2AB - AD$ . (Μονάδες 9)
- γ) Φέρνουμε την  $EΚ$  που τέμνει την προέκταση της  $ΔΓ$  στο  $Z$ .  
Να αποδείξετε ότι  $ΓZ = AB - AD$ . (Μονάδες 9)

Θέμα 13520

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$  και σημείο  $P$  εκτός του κύκλου. Από το  $P$  φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $PA$  και  $PB$ . Η  $PO$  τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο  $AB$  στο  $\Gamma$  και  $\widehat{APB} = 60^\circ$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $OP = 2\rho$ .

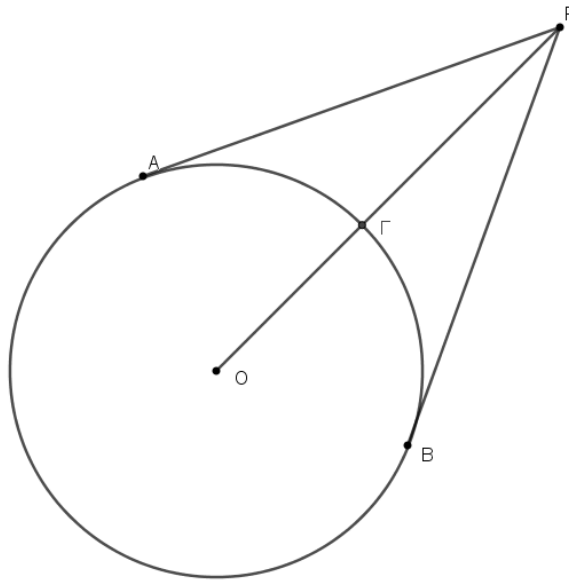
(Μονάδες 10)

β)  $\widehat{A\Gamma B} = 120^\circ$ .

(Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο  $OAGB$  είναι ρόμβος.

Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)



Θέμα 13522

ΘΕΜΑ 4

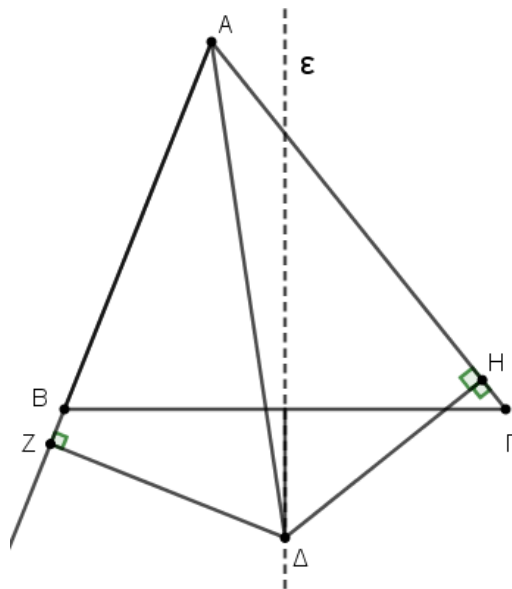
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $A$  τέμνει την μεσοκάθετο ( $\epsilon$ ) της  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρνουμε τα κάθετα τμήματα  $\Delta Z$  και  $\Delta H$  προς τις  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $AZ\Delta$  και  $AH\Delta$ . (Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι  $BZ = H\Gamma$ . (Μονάδες 09)

γ) Αν η γωνία  $A = 60^\circ$  και  $M$  το μέσο της  $AD$ , να αποδείξετε ότι  $HM = Z\Delta$ .

(Μονάδες 08)



Θέμα 13532

## ΘΕΜΑ 2

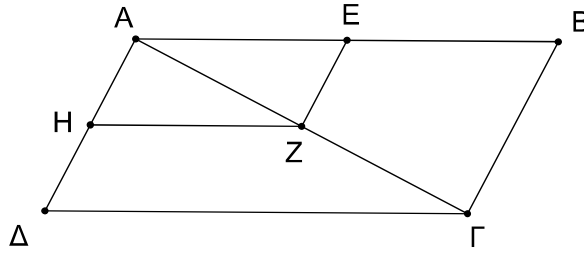
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  και τα μέσα  $Ε$ ,  $Ζ$  και  $Η$  των  $ΑΒ$ ,  $ΑΓ$  και  $ΑΔ$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $ZH = \frac{AB}{2}$ .

(Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο  $ΑΕΖΗ$  είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

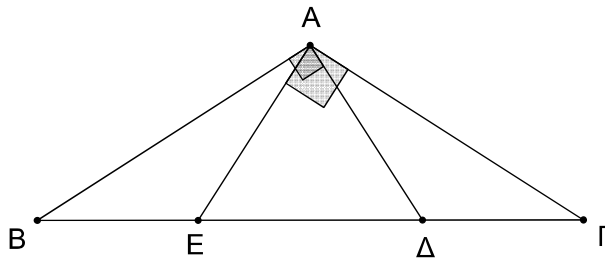


Θέμα 13533

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές και αμβλυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Η κάθετη στην  $AB$  στο σημείο  $A$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$  και η κάθετη στην  $A\Gamma$  στο σημείο  $A$  τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)  
β) το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)  
γ)  $BE = \Gamma\Delta$ . (Μονάδες 8)



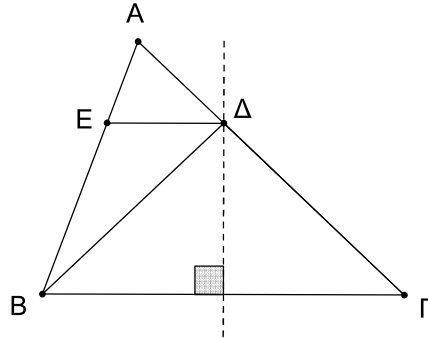
Θέμα 13534

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Η μεσοκάθετος της πλευράς  $B\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$  και η παράλληλη από το  $\Delta$  προς τη  $B\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $B\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A\hat{\Delta}B$ . (Μονάδες 13)



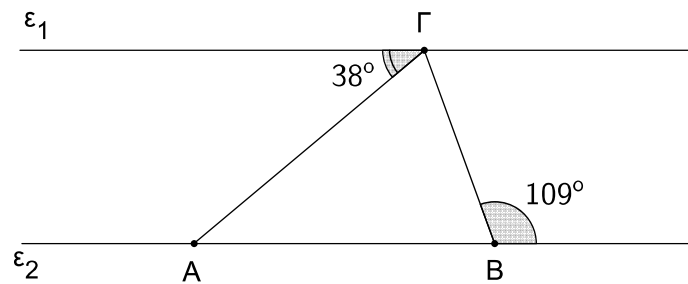
Θέμα 13535

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα η ευθεία  $\varepsilon_1$  διέρχεται από την κορυφή  $\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $\varepsilon_2$  που ορίζεται από τις κορυφές του  $A$  και  $B$ . Αξιοποιώντας τα δεδομένα του σχήματος:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 15)

β) να δικαιολογήσετε γιατί το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές και να εξηγήσετε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του. (Μονάδες 10)



Θέμα 13536

## ΘΕΜΑ 2

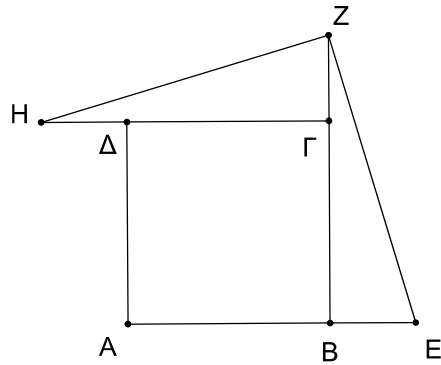
Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  προς το  $B$ ,  $B\Gamma$  προς το  $\Gamma$  και  $\Gamma\Delta$  προς το  $\Delta$  θεωρούμε σημεία  $E$ ,  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα, ώστε  $BE = \Gamma Z = \Delta H$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $ZE = ZH$ .

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{EZH} = 90^\circ$ .

(Μονάδες 10)



Θέμα 13537

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ , σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $A\Gamma$ , ώστε  $A\Delta = B\Delta = B\Gamma$  και σημείο  $E$  της πλευράς  $AB$ , ώστε  $AE = \Gamma\Delta$ .

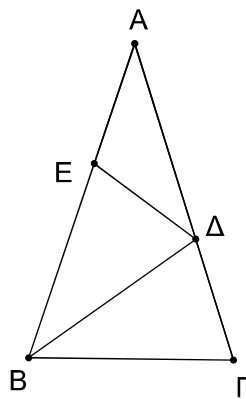
α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\hat{\Gamma} = 2\hat{A}$ . (Μονάδες 6)

ii.  $\hat{A} = 36^\circ$ . (Μονάδες 6)

iii. Το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Στην προέκταση της  $\Delta E$  προς το  $E$  θεωρούμε σημείο  $Z$ , ώστε  $\Delta Z = A\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta Z$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)



Θέμα 13539

## ΘΕΜΑ 4

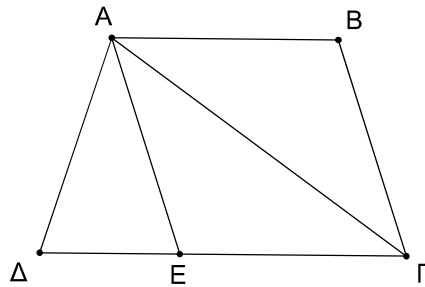
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $\hat{A} = 108^\circ$ . Στη βάση  $\Gamma\Delta$  θεωρούμε σημείο  $E$ , ώστε οι  $A\Gamma$ ,  $AE$  να τριχοτομούν τη γωνία  $\hat{A}$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $A\Delta E$ . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)

ii. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



Θέμα 13540

## ΘΕΜΑ 4

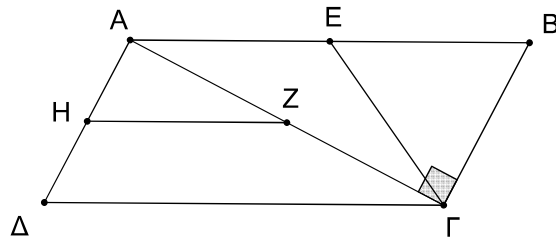
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  τέτοιο, ώστε η διαγώνιός του  $A\Gamma$  να είναι κάθετη στη  $B\Gamma$ . Θεωρούμε τα μέσα  $E$ ,  $Z$  και  $H$  των  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\Gamma E = ZH$ . (Μονάδες 9)

ii. Η  $\Gamma A$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta\hat{\Gamma}E$ . (Μονάδες 9)

β) Αν  $\Delta H = \frac{AB}{4}$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Gamma E$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)



Θέμα 13619

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος με  $\widehat{A}_{εξ} = 100^\circ$  και  $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 220^\circ$ .

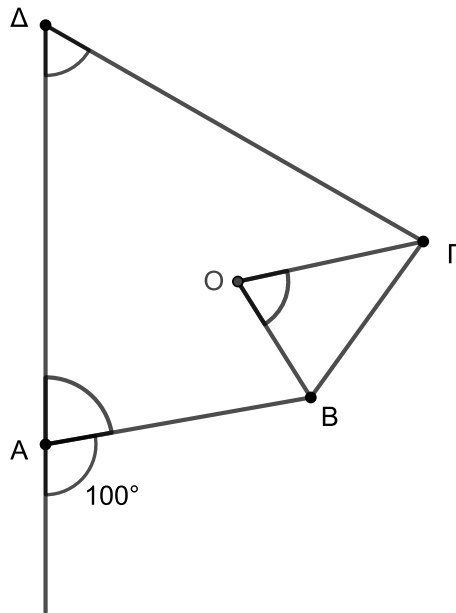
Αν οι διχοτόμοι των γωνιών  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma}$  τέμνονται στο Ο, τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{A}$  και  $\widehat{D}$  του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{B\hat{O}\Gamma} = 70^\circ$ .

(Μονάδες 15)



Θέμα 13653

## ΘΕΜΑ 2

Σχεδιάζουμε γωνία  $\widehat{xOy} = 60^\circ$  και παίρνουμε σημείο  $A$  επί της πλευράς  $Ox$ , τέτοιο ώστε  $AO = 2$ . Φέρουμε τη διχοτόμο  $O\delta$  της γωνίας  $\widehat{xOy}$  και θεωρούμε σημείο  $M$  στην  $O\delta$ , τέτοιο ώστε  $AM = AO$ . Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία  $\delta\widehat{Oy}$ .

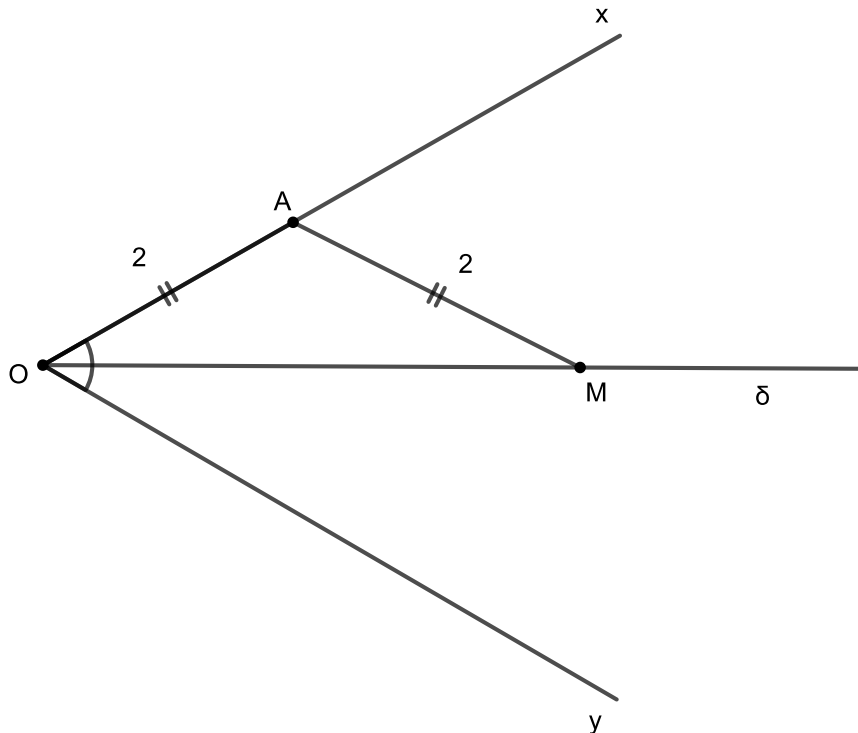
(Μονάδες 6)

β) Τις γωνίες του τριγώνου  $AOM$ .

(Μονάδες 9)

γ) Το μήκος του ύψους  $AB$  που αντιστοιχεί στη βάση  $OM$  του ισοσκελούς τριγώνου  $AOM$ .

(Μονάδες 10)



Θέμα 13654

## ΘΕΜΑ 2

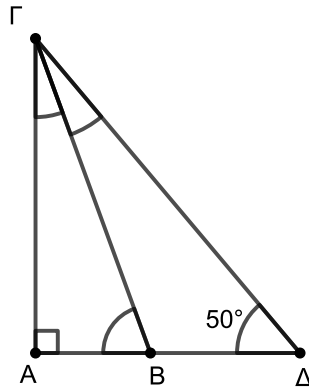
Στο ακόλουθο σχήμα είναι  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{A\hat{B}\Gamma} - \hat{A\hat{\Gamma}B} = 50^\circ$  και  $\hat{A\hat{\Delta}\Gamma} = 50^\circ$ .

α) Να υπολογίσετε τις οξείες γωνίες  $\hat{A\hat{B}\Gamma}$  και  $\hat{A\hat{\Gamma}B}$  του ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η  $\Gamma B$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A\hat{\Gamma}\Delta}$ .

(Μονάδες 15)



Θέμα 13672

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $AB > A\Gamma$ . Από το μέσο  $\Delta$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε κάθετη στη  $B\Gamma$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο  $AH$  της γωνίας  $\hat{A}$  στο σημείο  $E$ . Έστω  $AZ$  το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{\Gamma A Z} = \hat{\Delta A B}$ .

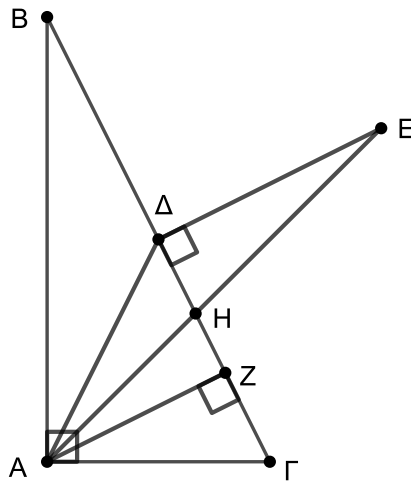
(Μονάδες 8)

β)  $A\Delta = \Delta E$ .

(Μονάδες 9)

γ)  $\hat{Z A \Delta} = \hat{\Gamma} - \hat{B}$ .

(Μονάδες 8)



Θέμα 13687

## ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R$  θεωρούμε επίκεντρη γωνία  $\widehat{AOB} = 40^\circ$ .

Προεκτείνουμε τις ακτίνες  $OA$  και  $OB$  κατά τμήματα  $AG$  και  $BD$  αντίστοιχα, έτσι ώστε  $AG = OA$  και  $BD = OB$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = 70^\circ$ .

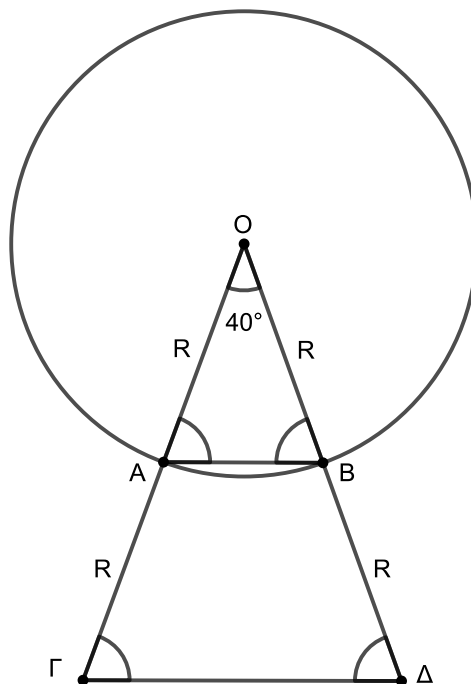
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{O\Gamma\Delta}$  και  $\widehat{O\Delta\Gamma}$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι  $AB \parallel \Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 5)



Θέμα 13697

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, τα τμήματα ΑΕ, ΒΖ, ΒΔ και ΓΕ αναπαριστούν τέσσερις ίσους ράβδους μήκους 40 cm οι οποίες αποτελούν μέρη μιας κρεμάστρας τοίχου.

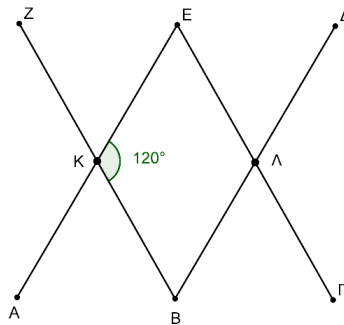
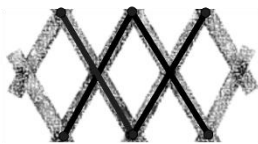
Οι ράβδοι συνδέονται με τέτοιο τρόπο ώστε ανά δύο απέναντι να είναι παράλληλες, δηλαδή  $AE \parallel B\Delta$  και  $BZ \parallel \Gamma E$ , και ανά δύο να έχουν κοινό μέσο, δηλαδή Κ κοινό μέσο των ΑΕ, ΒΖ και Λ κοινό μέσο των ΒΔ, ΓΕ. Έστω ότι η μία από τις γωνίες που σχηματίζουν οι τεμνόμενες ράβδοι ΑΕ και ΒΖ με κορυφή το κοινό τους μέσο Κ, η γωνία  $\widehat{B\hat{K}E}$ , είναι ίση με  $120^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{A\hat{K}B} = \widehat{K\hat{B}\Lambda} = \widehat{B\hat{\Lambda}\Gamma} = 60^\circ$ . (Μονάδες 9)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΒΛΓ είναι ίσα και ισόπλευρα. Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ ανήκουν στην ίδια ευθεία. (Μονάδες 6)



Θέμα 13699

## ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δυο κύκλοι  $(K, \rho_1)$  και  $(L, \rho_2)$  που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο  $A$ . Έστω ότι μια ευθεία  $(\varepsilon)$  εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη  $(\zeta)$  των κύκλων στο σημείο επαφής τους  $A$  τέμνει την ευθεία  $(\varepsilon)$  σε σημείο  $M$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. οι ευθείες  $KB$  και  $LM$  τέμνονται σε σημείο, έστω  $\Delta$ . (Μονάδες 10)
- ii. το τρίγωνο  $\Delta KL$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες  $\rho_1$  και  $\rho_2$  των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο  $\Delta KL$  να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

Θέμα 13702

## ΘΕΜΑ 3

Δίνονται δυο κύκλοι  $(K, \rho_1)$  και  $(\Lambda, \rho_2)$  που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο  $A$ . Μια ευθεία  $(\varepsilon)$  εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα. Αν η εσωτερική εφαπτομένη των κύκλων στο σημείο επαφής τους  $A$  τέμνει την ευθεία  $(\varepsilon)$  σε σημείο  $M$ , να αποδείξετε ότι:

α) τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  ανήκουν σε κύκλο του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα. (Μονάδες 12)

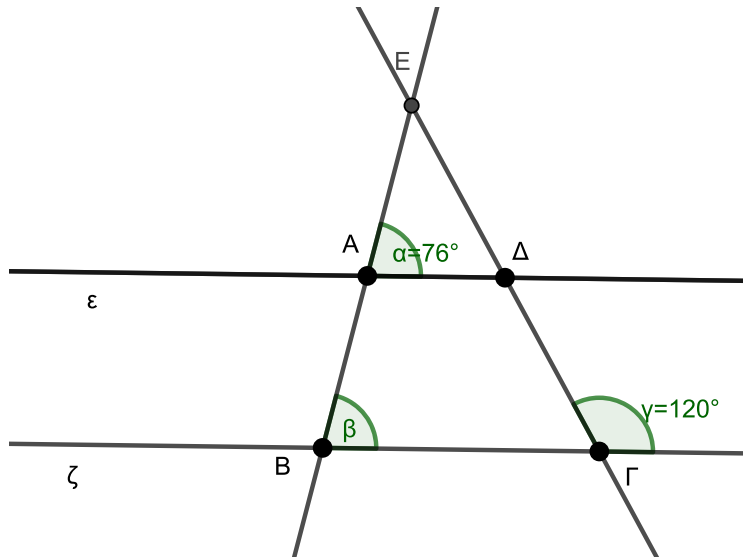
β) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  εφάπτεται στη διάκεντρο  $K\Lambda$  των κύκλων  $(K, \rho_1)$  και  $(\Lambda, \rho_2)$ . (Μονάδες 13)

Θέμα 13741

## ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί οι ευθείες  $\epsilon$  και  $\zeta$  είναι παράλληλες. Αν είναι  $\hat{\alpha} = 76^\circ$  και  $\hat{\gamma} = 120^\circ$ , να υπολογίσετε :

- α) Τη γωνία  $\hat{\beta}$ . (Μονάδες 5)
- β) Τις γωνίες του τετράπλευρου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)
- γ) Τη γωνία  $\hat{E}$  του τριγώνου ΕΑΔ. (Μονάδες 8)



Θέμα 13742

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $M$  το μέσο της βάσης του  $B\Gamma$ . Φέρουμε  $BK \perp B\Gamma$  έτσι ώστε  $BK = A\Gamma$  (το σημείο  $K$  είναι στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το  $A$ ).

α) Να αποδείξετε ότι  $AM \parallel BK$  και  $AB = BK$ . (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η  $AK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $BAM$ . (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{BKA} = 45^\circ - \frac{\widehat{\Gamma}}{2}$  (Μονάδες 6)

δ) Μπορεί το τετράπλευρο  $ABKM$  να είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

Θέμα 13743

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημείο  $M$  στην πλευρά  $AB$ . Από το  $M$  φέρουμε παράλληλη στη  $B\Gamma$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{\Delta M \Gamma} = \widehat{B \Gamma M}$ . (Μονάδες 05)

β) Αν το τρίγωνο  $\Gamma AB$  είναι ισοσκελές με βάση  $AB$ , να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου  $M$  στην  $AB$  ώστε το τρίγωνο  $\Delta M \Gamma$  να είναι ισοσκελές με  $\Delta M = \Delta \Gamma$  και να δικαιολογήσετε τους ισχυρισμούς σας. (Μονάδες 10)

γ) Αν  $M$  είναι το μέσο του τμήματος  $AB$  και  $E$  το μέσο του τμήματος  $B\Gamma$  να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο  $M\Delta E B$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

Θέμα 13744

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο  $ΑΒΓΔ$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών του  $ΑΒ$  και  $ΒΓ$  προς το  $Β$  και προς το  $Γ$  αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία  $Ε$  και  $Ζ$  τέτοια ώστε  $ΒΕ = ΓΖ$ . Αν  $Ρ$  είναι το σημείο τομής των  $ΑΖ$  και  $ΔΕ$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Οι γωνίες  $\widehat{ΑΕΔ}$  και  $\widehat{ΒΖΑ}$  είναι ίσες.
- ii. Τα τμήματα  $ΑΖ$  και  $ΔΕ$  είναι κάθετα.

(Μονάδες 18)

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής  $Ρ$  των  $ΑΖ$  και  $ΔΕ$  είναι τέτοιο ώστε  $ΡΒ = ΑΒ$ , να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου  $Ε$  στην προέκταση του τμήματος  $ΑΒ$ . (Μονάδες 07)

Θέμα 13745

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ , το μέσο  $M$  της βάσης  $B\Gamma$  και τυχαίο εσωτερικό σημείο  $\Delta$  στη βάση του.

α) Αν από το μέσο  $M$  φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

i.  $ME = MZ$ . (Μονάδες 6)

ii. Το  $AEMZ$  είναι ρόμβος με περίμετρο ίση με  $2AB$ . (Μονάδες 7)

β) Αν πάρουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο  $\Delta$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$ , διαφορετικό από το μέσο  $M$ , και φέρουμε τις παράλληλες προς τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  του τριγώνου, που τις τέμνουν στα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα, τότε:

i. Ποιο είναι το είδος του τετράπλευρου  $AK\Delta\Lambda$ ;

ii. Να συγκρίνετε την περίμετρο του τετράπλευρου  $AK\Delta\Lambda$  με την περίμετρο του ρόμβου  $AEMZ$  του ερωτήματος α ii) και να διατυπώστε λεκτικά το συμπέρασμα που προκύπτει.

(Μονάδες 12)

Θέμα 13746

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσός του  $AD$ . Στην προέκταση της διαμέσου  $AD$  προς το  $\Delta$  παίρνουμε σημείο  $E$ , έτσι ώστε  $AD = DE$ .

α) Να αποδείξετε ότι :

- i. Τα τρίγωνα  $ABD$  και  $E\Gamma D$  είναι ίσα. (Μονάδες 07)
- ii. Η διάμεσος  $AD$  είναι μικρότερη από το ημιάθροισμα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  που την περιέχουν. (Μονάδες 08)

β) Αν στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  το διπλάσιο της διαμέσου  $AD$  ισούται με την πλευρά  $B\Gamma$ , να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου  $ABE\Gamma$  και το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 10)

Θέμα 13748

## ΘΕΜΑ 2

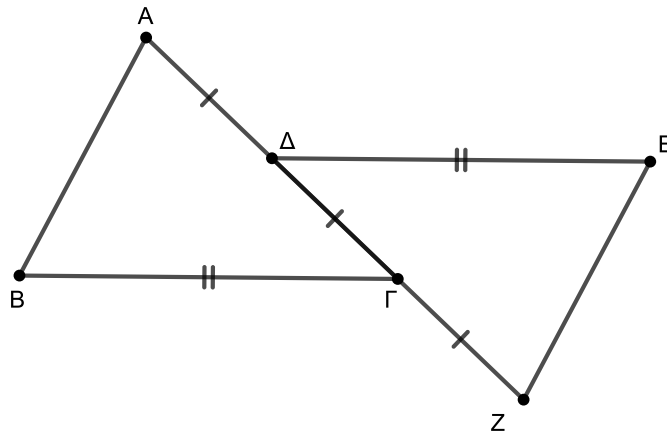
Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  θεωρούμε το μέσο  $\Delta$  της πλευράς  $A\Gamma$ . Φέρουμε τμήμα  $\Delta E$  ίσο και παράλληλο με την πλευρά  $B\Gamma$  όπως φαίνεται στο σχήμα. Προεκτείνουμε την  $A\Gamma$  προς το μέρος του  $\Gamma$  και παίρνουμε σημείο  $Z$  τέτοιο ώστε  $\Gamma Z = \Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $ZE\Delta$  είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

β)  $AB \parallel EZ$ .

(Μονάδες 15)



Θέμα 13749

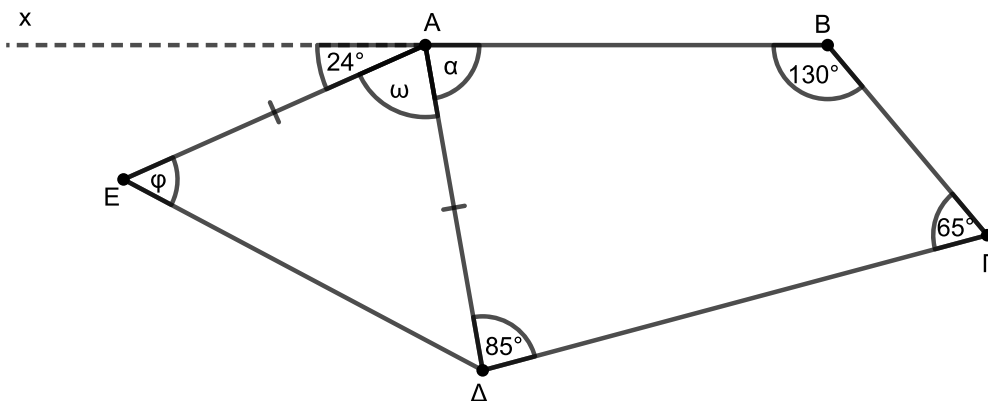
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το  $ABΓΔΕ$  είναι ένα πεντάγωνο στο οποίο η διαγώνιος  $ΑΔ$  είναι ίση με την πλευρά  $ΑΕ$  και η ημιευθεία  $Αχ$  είναι προέκταση της  $ΒΑ$  προς το  $Α$ . Να υπολογίσετε δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

α) Τη γωνία  $\hat{\alpha}$ . (Μονάδες 08)

β) Τη γωνία  $\hat{\omega}$ . (Μονάδες 08)

γ) Τη γωνία  $\hat{\varphi}$ . (Μονάδες 09)



Θέμα 13750

## ΘΕΜΑ 4

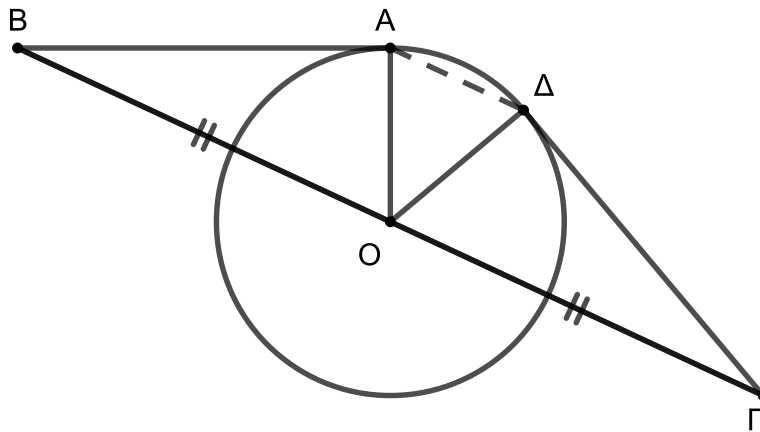
Από σημείο Β εξωτερικό ενός κύκλου (Ο, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΒΑ. Ενώνουμε το σημείο Β με το κέντρο Ο του κύκλου και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα ΟΓ = ΒΟ. Από το σημείο Γ φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΓΔ, όπως στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $AB = \Delta\Gamma$  (Μονάδες 08)

ii.  $A\Delta \parallel B\Gamma$  (Μονάδες 10)

β) Αν το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος ΒΑ είναι ίσο με την ακτίνα R, τι είδους τρίγωνο είναι το τρίγωνο ΑΟΔ; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)



Θέμα 13751

## ΘΕΜΑ 4

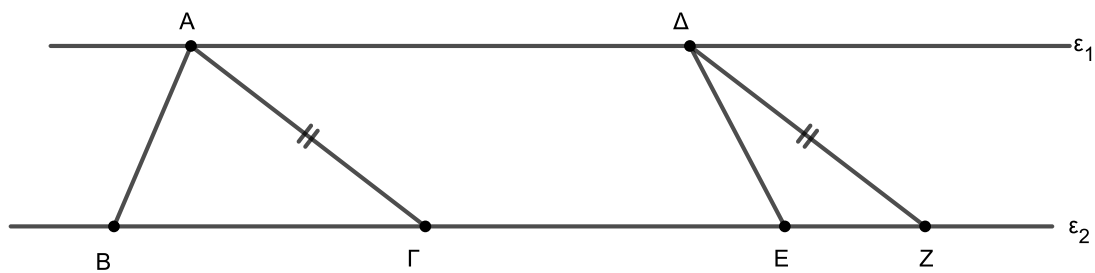
Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλες. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι οξυγώνιο, ενώ το  $\Delta EZ$  είναι αμβλυγώνιο με  $\hat{E} > 90^\circ$ . Ισχύει επίσης ότι  $AG = \Delta Z$ .

α)

i. Να σχεδιάσετε τα ύψη των τριγώνων από τις κορυφές  $A$  και  $\Delta$  ονομάζοντάς τα  $AH$  και  $\Delta\Theta$  αντίστοιχα. (Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι  $H\Gamma = \Theta Z$ . (Μονάδες 12)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί  $EZ < B\Gamma$ . (Μονάδες 08)



Θέμα 13752

## ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{B} < 90^\circ$  θεωρούμε τυχαίο σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $A\Gamma$ . Φέρουμε τμήμα  $\Delta E$  ίσο και παράλληλο με την πλευρά  $B\Gamma$  και από το σημείο  $E$  φέρουμε τμήμα  $EZ$  ίσο και παράλληλο με την πλευρά  $AB$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

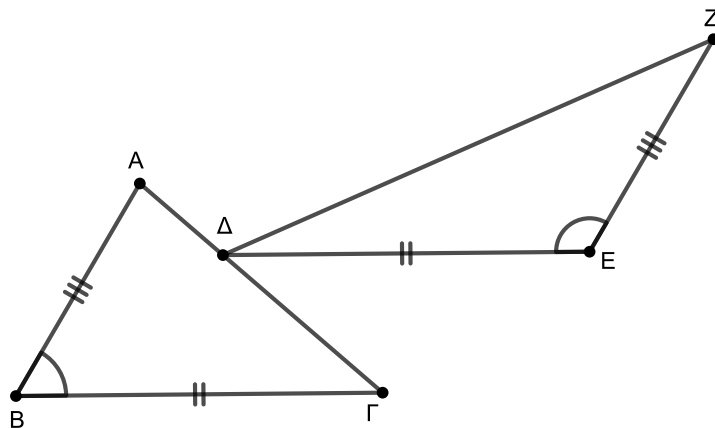
α) Ένας μαθητής κάνει τους παρακάτω διαδοχικούς συλλογισμούς. Να χαρακτηρίσετε  $\Sigma$  (Σωστό) ή  $\Lambda$  (Λάθος) κάθε έναν από αυτούς.

1. Οι γωνίες  $\widehat{\Delta E Z}$  και  $\widehat{A B \Gamma}$  είναι γωνίες με πλευρές παράλληλες.
2. Οπότε  $\widehat{\Delta E Z} = \widehat{A B \Gamma}$ .
3. Τα τρίγωνα  $\Delta E Z$  και  $A B \Gamma$  είναι ίσα.
4. Το τμήμα  $\Delta Z$  είναι ίσο με το τμήμα  $A \Gamma$ .

(Μονάδες 08)

β) Να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς σας ( $\Sigma$  ή  $\Lambda$ ) που αφορούν τους ισχυρισμούς 2. και 3. (Μονάδες 10)

γ) Αν στα δεδομένα παραλείψουμε τη συνθήκη  $\widehat{B} < 90^\circ$ , να συγκρίνετε τα τμήματα  $A\Gamma$  και  $\Delta Z$  για τα διάφορα είδη της γωνίας  $\widehat{B}$  και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 07)



Θέμα 13755

## ΘΕΜΑ 2

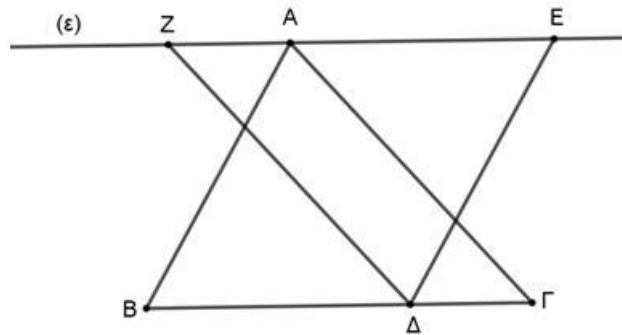
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από την κορυφή  $A$  φέρουμε ευθεία  $(\varepsilon)$  παράλληλη προς τη  $B\Gamma$ .

Από το τυχαίο σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε τις παράλληλες προς την  $AB$  και  $A\Gamma$ , οι οποίες τέμνουν την ευθεία  $(\varepsilon)$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα  $ZA\Gamma\Delta$  και  $AB\Delta E$  είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα. (Μονάδες 15)



Θέμα 13757

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο κύκλοι  $(K,2)$  και  $(\Lambda,5)$ .

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

(Μονάδες 6)

γ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν ο κύκλος  $(K,2)$  βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου  $(\Lambda,5)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται το μήκος της διακέντρου ΚΛ, αν οι κύκλοι τέμνονται; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

Θέμα 13758

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο κύκλοι  $(Κ,3)$  και  $(Λ,8)$ . Να βρείτε τη σχετική θέση των δύο κύκλων, αιτιολογώντας την απάντησή σας, όταν:

α)  $ΚΛ = 13$ . (Μονάδες 5)

β)  $ΚΛ = 2$ . (Μονάδες 5)

γ)  $ΚΛ = 5$ . (Μονάδες 5)

δ)  $ΚΛ = 11$ . (Μονάδες 5)

ε)  $ΚΛ = 9$ . (Μονάδες 5)

Θέμα 13759

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho = 6$ . Έστω  $d$  η απόσταση του κέντρου  $O$  του κύκλου από μια ευθεία  $(\epsilon)$ . Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας  $(\epsilon)$  στις εξής περιπτώσεις:

α)  $d = 3$ .

(Μονάδες 9)

β)  $d = 6$ .

(Μονάδες 8)

γ)  $d = 9$ .

(Μονάδες 8)

Θέμα 13767

## ΘΕΜΑ 2

Σε ευθεία  $\epsilon$  θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  έτσι ώστε  $AB = B\Gamma$ . Στη συνέχεια, σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $B\Gamma E$  προς το ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία  $\epsilon$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\Delta\hat{B}E$ .

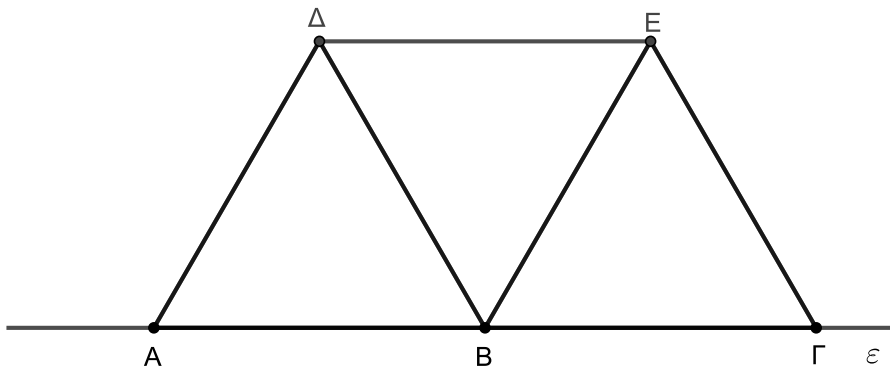
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta E$  είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Delta E B$  είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)



Θέμα 13816

## ΘΕΜΑ 2

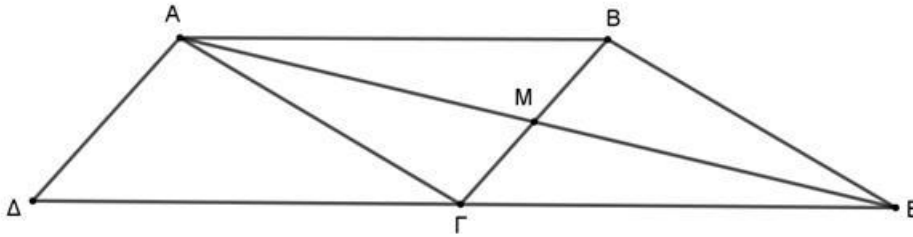
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  τέτοιο, ώστε  $ΑΔ < ΑΒ$  και  $Μ$  το μέσο της  $ΒΓ$ .

Προεκτείνουμε την  $ΑΜ$  προς το  $Μ$  κατά τμήμα  $ΜΕ = ΑΜ$ .

Να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο  $ΑΒΕΓ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) τα σημεία  $Δ$ ,  $Γ$  και  $Ε$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 15)



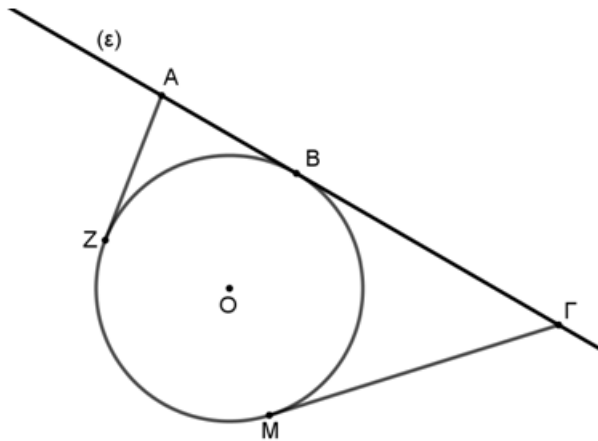
Θέμα 13817

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Σε σημείο  $B$  του κύκλου φέρουμε εφαπτόμενη ευθεία  $(\varepsilon)$ . Θεωρούμε στην ευθεία  $(\varepsilon)$  δύο σημεία  $A$  και  $\Gamma$  εκατέρωθεν του  $B$  έτσι ώστε  $BA < B\Gamma$  και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $AZ$  και  $\Gamma M$  στον κύκλο.

α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = AZ + M\Gamma$ . (Μονάδες 10)



Θέμα 13822

## ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon)$  και  $(\psi)$ .

α) Αν η γωνία  $B\hat{A}\Gamma$  είναι μεγαλύτερη από την  $A\hat{B}\psi$ :

i. Να αποδείξετε ότι  $B\hat{A}\varepsilon + A\hat{B}\psi < 180^\circ$ . (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon$  και  $\psi$  τέμνονται. Σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η  $AB$  βρίσκεται το σημείο τομής των  $\varepsilon$  και  $\psi$  και γιατί;

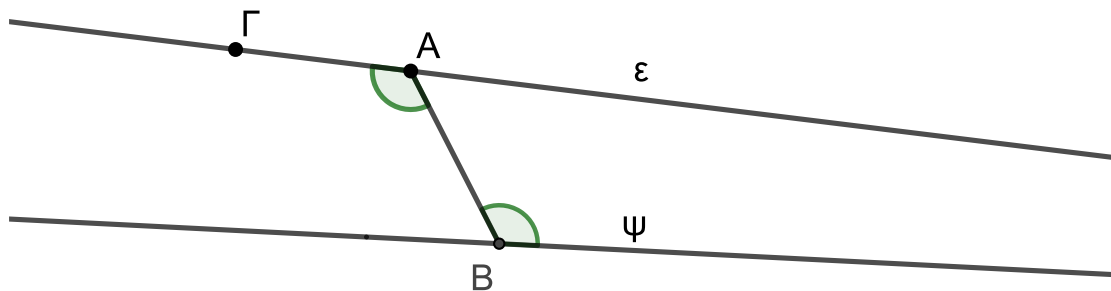
(Μονάδες 6)

β) Να διατυπώσετε την πρόταση που αποδείχθηκε στο α) για τις εντός και εναλλάξ γωνίες δύο ευθειών που τέμνονται από τρίτη και το σημείο τομής των ευθειών αυτών.

(Μονάδες 7)

γ) Αν ισχύει  $B\hat{A}\Gamma < A\hat{B}\psi$ , τότε σε ποιο από τα ημιεπίπεδα που χωρίζει το επίπεδο η  $AB$  βρίσκεται το σημείο τομής των  $\varepsilon$  και  $\psi$  και γιατί;

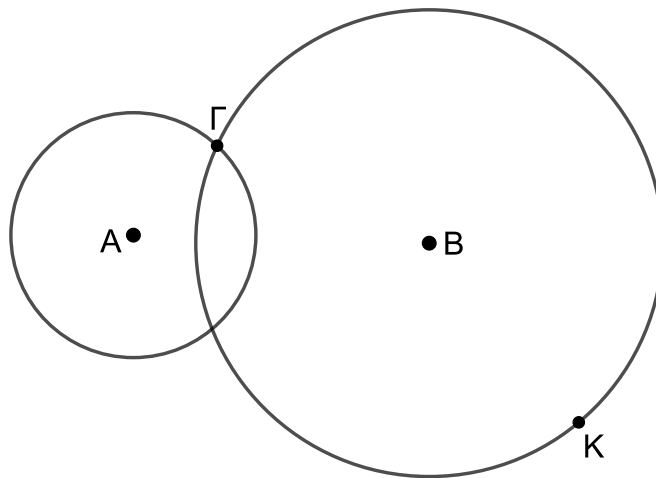
(Μονάδες 6)



Θέμα 13823

## ΘΕΜΑ 4

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους  $(A, \rho)$  και  $(B, R)$  ισχύει  $\rho < R$  και  $AB = 6$ .



i. Να αποδείξετε ότι  $BK - A\Gamma < AB < BK + A\Gamma$ .

ii. Παρακάτω γράφονται οι ιδιότητες 1 και 2. Ποιο σημείο από τα K και Γ έχει την ιδιότητα 1, ποιο την ιδιότητα 2 και ποιο έχει και τις δύο;

Ιδιότητα 1: «Το σημείο απέχει R από το B.»

Ιδιότητα 2: «Το σημείο απέχει  $\rho$  από το A.»

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 16)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 2 από το B του χάρτη. Μπορεί να είναι σωστή η πληροφορία που δίνει ο χάρτης για να βρει κανείς το θησαυρό;

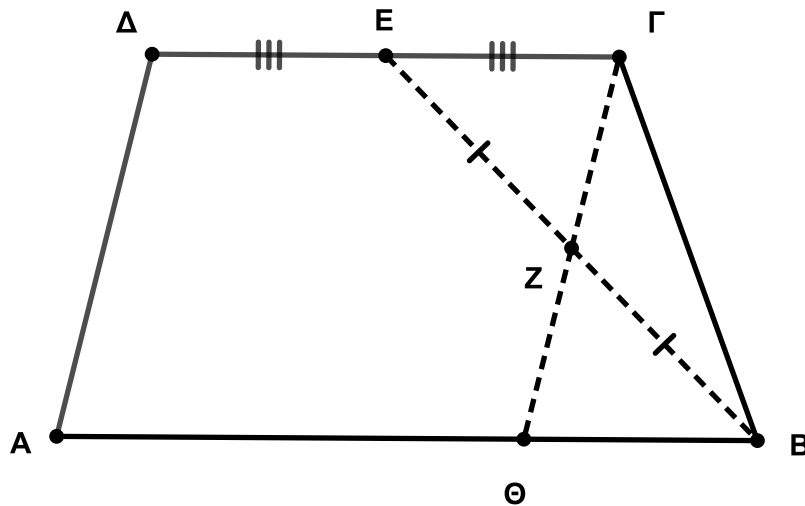
(Μονάδες 9)

Θέμα 13824

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με βάσεις  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ . Αν  $E$  και  $Z$  τα μέσα των  $\Gamma\Delta$  και  $BE$  αντίστοιχα και  $\Theta$  το σημείο τομής της  $AB$  και της προέκτασης της  $\Gamma Z$ , να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $\Gamma EZ$ ,  $\Theta BZ$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)
- β)  $E\Gamma = \Theta B$ . (Μονάδες 5)
- γ) Το τετράπλευρο  $EB\Theta\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



Θέμα 13825

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα  $M\Delta$  ίσο και παράλληλο προς την  $BA$  και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα  $ME$  ίσο και παράλληλο προς την  $GA$  (τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη  $B\Gamma$  και το σημείο  $A$ ). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα  $A\Delta MB$  και  $A\Gamma ME$  είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 12)

β)  $\Delta A = A E$ . (Μονάδες 13)

Θέμα 13826

ΘΕΜΑ 2

Τα τρίγωνα  $ABK$  και  $\Gamma\Delta\Lambda$  του σχήματος έχουν  $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$  και  $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABK$  και  $\Gamma\Delta\Lambda$  είναι ίσα και ότι έχουν  $BK = \Delta\Lambda$ .

(Μονάδες 12)

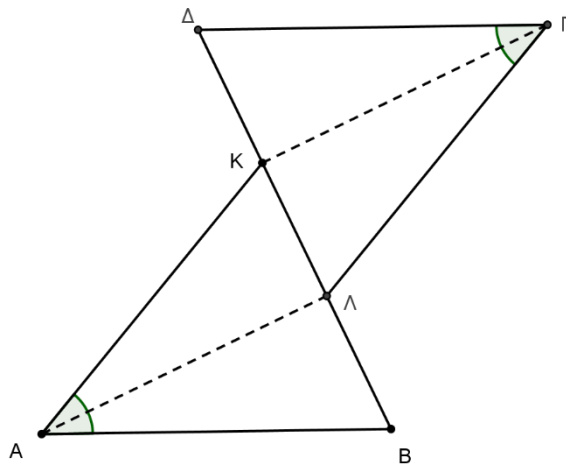
β) Έστω ότι  $\Lambda$  και  $K$  είναι τα μέσα των  $BK$  και  $\Delta\Lambda$  αντίστοιχα:

i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα  $B\Lambda$ ,  $\Lambda K$  και  $K\Delta$  είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι οι  $A\Lambda$  και  $\Gamma K$  είναι κάθετες στην ευθεία  $K\Lambda$ .

(Μονάδες 8)



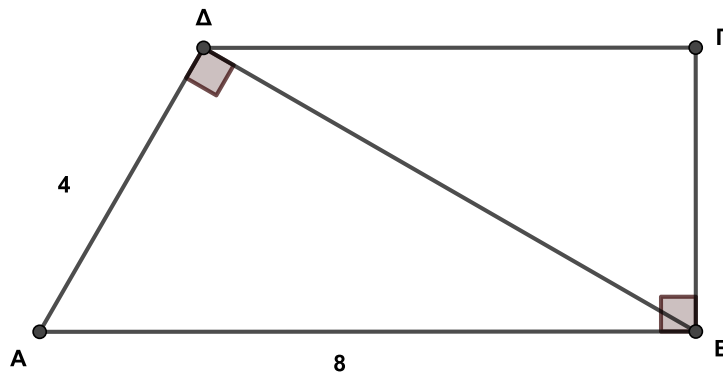
Θέμα 13828

## ΘΕΜΑ 2

Σε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  η διαγώνιος  $B\Delta$  είναι κάθετη στην πλευρά  $A\Delta$  και η πλευρά  $\Gamma B$  κάθετη στη βάση  $AB$ . Αν  $A\Delta=4$  και  $AB=8$  τότε:

α) Να υπολογιστεί η γωνία  $\widehat{\Delta\hat{A}B}$ . (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η διαγώνιος  $B\Delta$  του τραapeζίου  $AB\Gamma\Delta$  είναι διπλάσια της πλευράς του  $B\Gamma$ . (Μονάδες 13)



Θέμα 13829

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία  $E$  και  $Z$  των τμημάτων  $AO$  και  $ΓO$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $AE=ΓZ$ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ΑΕΔ$  και  $ΓΖΒ$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΔΕΒΖ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

Θέμα 13831

## ΘΕΜΑ 2

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει  $\hat{A} = 90^\circ$ .

α) Να σχεδιάσετε ένα τέτοιο τρίγωνο αν επιπλέον γνωρίζετε ότι  $AB > AG$ . Ποια είναι η μικρότερη γωνία του τριγώνου και γιατί; (Μονάδες 10)

β) Αν για το τρίγωνο που σας ζητήθηκε να σχεδιάσετε στο α) ερώτημα γνωρίζετε επιπλέον ότι η μια από τις οξείες γωνίες του είναι ίση με  $30^\circ$ , τότε να απαντήσετε στα παρακάτω:

i. Πόσες μοίρες θα είναι η γωνία  $\hat{B}$  και πόσες η γωνία  $\hat{\Gamma}$ ; (Μονάδες 8)

ii. Ποια πλευρά του τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας; (Μονάδες 7)

Θέμα 13832

## ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα το M είναι μέσο των τμημάτων ΑΓ και ΒΔ. Επίσης  $\widehat{AMB} = \widehat{ΓMB}$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Οι ΑΓ και ΒΔ είναι κάθετες.

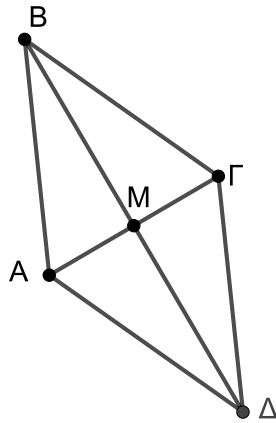
(Μονάδες 10)

ii. Το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

β) Το ΑΒΓΔ είναι η κάτοψη ενός κήπου. Για να περιφράξουμε τον κήπο χρειαζόμαστε 30 μέτρα φράχτη. Αν αφήσουμε την πλευρά ΑΒ του κήπου χωρίς φράχτη πόσα μέτρα φράχτη θα χρειαστούμε για τις υπόλοιπες πλευρές;

(Μονάδες 7)



Θέμα 13833

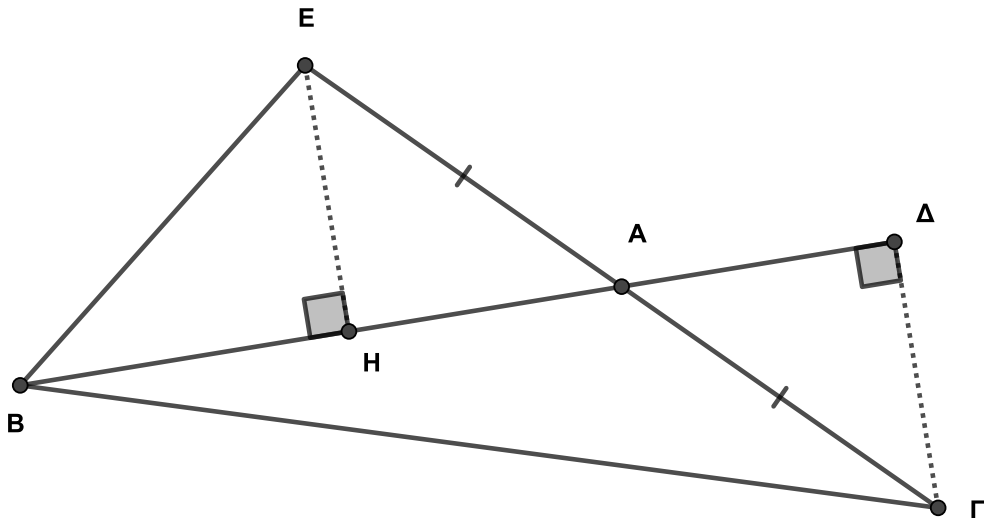
## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το  $\Gamma\Delta$  είναι ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$ , το  $EH$  είναι ύψος του τριγώνου  $ABE$  και η  $BA$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $BE\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $AEH$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι  $AH=AD$ . (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Gamma\Delta E\text{H}$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



Θέμα 13834

## ΘΕΜΑ 2

Σε τυχαίο τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρουμε τη διάμεσό του  $AM$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $B\Gamma$  προς το μέρος του  $B$  κατά τμήμα  $BZ=B\Gamma$  και προς το μέρος του  $\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma H=B\Gamma$ , επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  κατά τμήμα  $ME=AM$ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AMZ$  και  $EMH$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AHEZ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

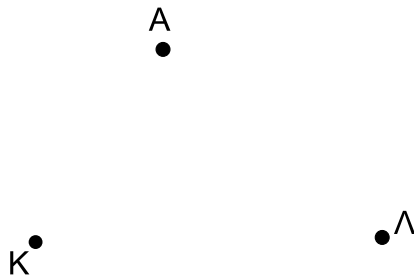
Θέμα 13835

## ΘΕΜΑ 2

Τα σημεία Α, Κ και Λ δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Το σημείο Α απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ.

α) Να αποδείξετε ότι  $1 < ΚΛ < 9$ . (Μονάδες 12)

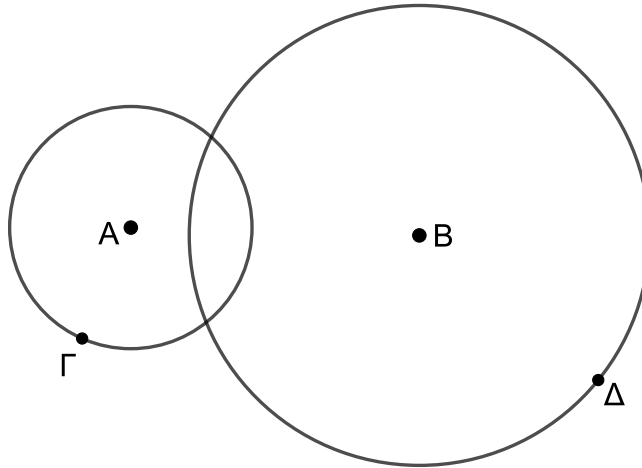
β) Να βρείτε ένα σημείο Β του επιπέδου διαφορετικό από το Α, που να απέχει 4 από το Κ και 5 από το Λ. (Μονάδες 13)



Θέμα 13836

## ΘΕΜΑ 2

α) Στο παρακάτω σχήμα για τους κύκλους  $(A, \rho)$  και  $(B, R)$  ισχύει  $\rho < R$ .



Να αποδείξετε ότι  $B\Delta - A\Gamma < AB < A\Gamma + B\Delta$ .

(Μονάδες 10)

β) Ο χάρτης ενός κρυμμένου θησαυρού έχει δύο σταθερά σημεία A και B, τα οποία απέχουν μεταξύ τους 6. Επίσης γράφει ότι ο θησαυρός είναι κρυμμένος σε ένα σημείο το οποίο απέχει 3 από το A του χάρτη και 5 από το B του χάρτη. Ποια είναι τα σημεία του χάρτη στα οποία μπορεί να είναι κρυμμένος ο θησαυρός;

(Μονάδες 15)

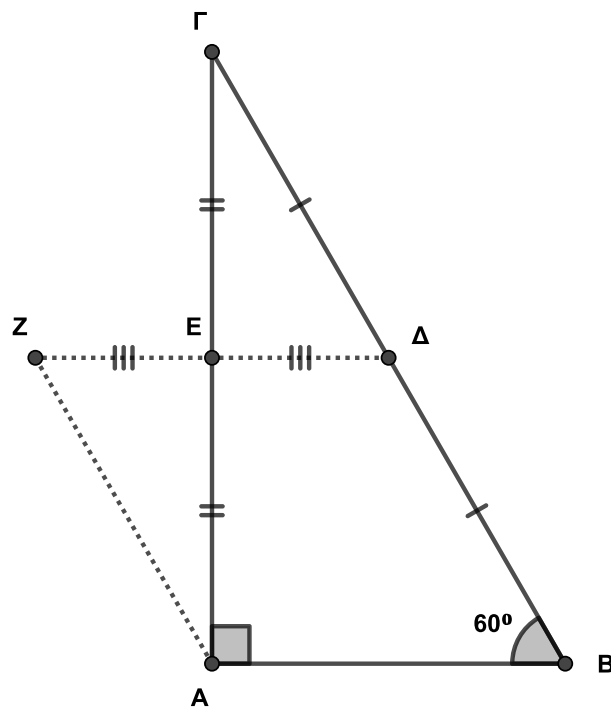
Θέμα 13837

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$  και  $\hat{B}=60^\circ$ . Θεωρούμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  που είναι τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την  $\Delta E$  κατά τμήμα  $EZ=DE$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\Gamma\Delta=AZ$ . (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ZAB$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



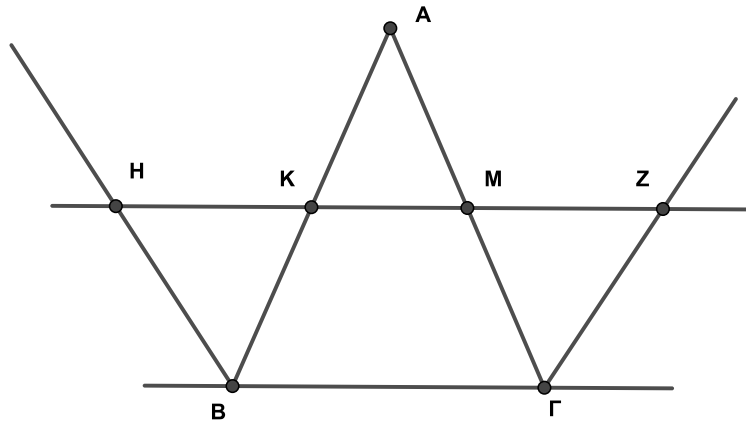
Θέμα 13838

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ), με  $K, M$  τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $K$  και  $M$  τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  στα σημεία  $H$  και  $Z$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $KM\Gamma B$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $B\Gamma ZH$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 14)



Θέμα 13839

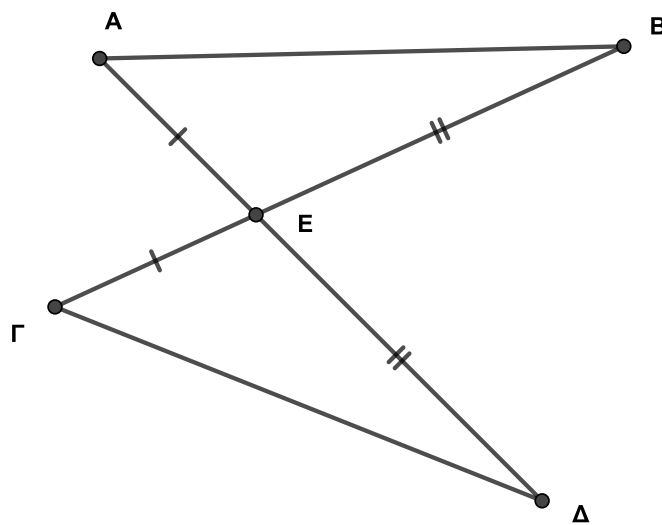
## ΘΕΜΑ 4

Τα ευθύγραμμα τμήματα  $AD$  και  $BΓ$  τέμνονται στο σημείο  $E$  έτσι ώστε  $AE=ΓE$  και  $BE=ED$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABE$  και  $ΓDE$  είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις  $EH$  και  $EΘ$  του σημείου  $E$  από τις πλευρές  $AB$  και  $ΓΔ$ , αντίστοιχα, είναι ίσες. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι προεκτάσεις των  $AB$  και  $ΓΔ$  προς τα  $A$  και  $Γ$  αντίστοιχα τέμνονται στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $BΔZ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)



Θέμα 13841

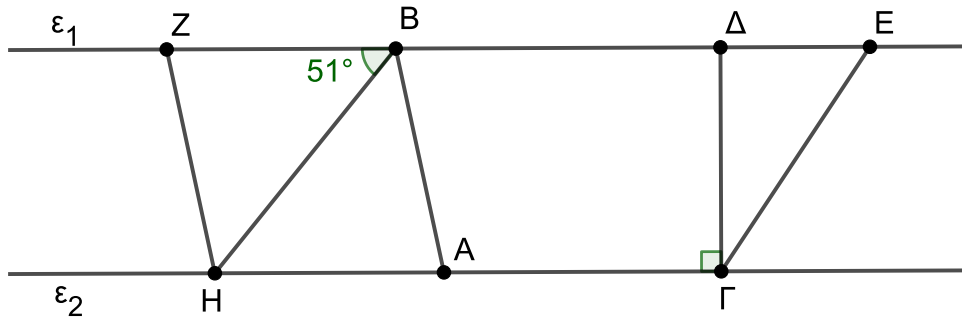
## ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $BD$  η διχοτόμος της γωνίας  $B$  και  $M$  το μέσο της. Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε παράλληλη προς τη  $B\Gamma$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $E$ . Αν η  $EM$  τέμνει τη  $B\Gamma$  στο σημείο  $Z$  τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι  $BE=ED$ . (Μονάδες 7)
- β) Να αποδείξετε ότι  $BE//Z\Delta$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta EBZ$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 5)
- δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου  $AB\Gamma$  ώστε το τετράπλευρο  $\Delta EBZ$  να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

Θέμα 13842

## ΘΕΜΑ 2



Στο παραπάνω σχήμα το τετράπλευρο  $ABZH$  είναι ρόμβος.

Επίσης δίνεται ότι  $\widehat{ZBH} = 51^\circ$  και ότι η  $A\widehat{\Gamma}\Delta$  είναι ορθή.

- α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $A\widehat{BH}$ . (Μονάδες 9)
- β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $A\widehat{HB}$ . (Μονάδες 6)
- γ) Αν η γωνία  $\widehat{E}$  του τριγώνου  $\Gamma\Delta E$  είναι ίση με  $56^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{\Gamma}$  του τριγώνου  $\Gamma\Delta E$ . (Μονάδες 10)

Θέμα 13843

## ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι οι ευθείες  $\chi\chi$  και  $\gamma\gamma$  εφάπτονται στον κύκλο  $(O,R)$  στα άκρα μιας διαμέτρου του  $AB$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) οι ευθείες  $\chi\chi$  και  $\gamma\gamma$  είναι παράλληλες. (Μονάδες 4)
- β) οι διχοτόμοι των γωνιών  $B\chi\alpha$  και  $AB\gamma$  τέμνονται σε σημείο  $M$ . (Μονάδες 6)
- γ) το σημείο  $M$  είναι το μέσο του ημικυκλίου  $AB$ . (Μονάδες 10)
- δ) αν η διχοτόμος της γωνίας  $B\chi\alpha$  τέμνει την  $\gamma\gamma$  στο σημείο  $\Gamma$  και η διχοτόμος της γωνίας  $AB\gamma$  τέμνει την  $\chi\chi$  στο σημείο  $\Delta$ , τότε  $M\Gamma = M\Delta$ . (Μονάδες 5)

Θέμα 13845

## ΘΕΜΑ 4

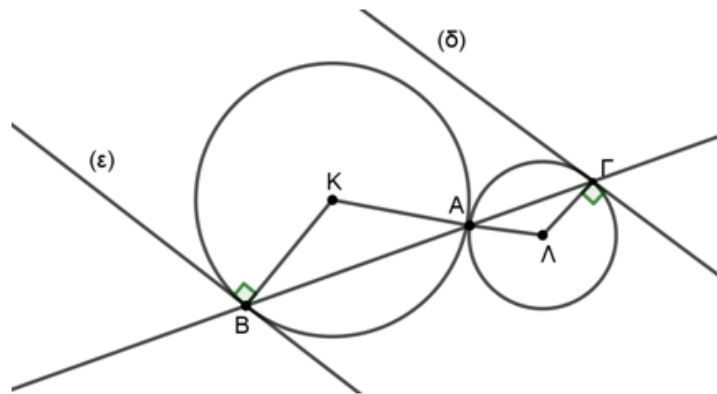
Οι κύκλοι  $(K,R)$ ,  $(\Lambda,\rho)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $A$ . Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το  $A$  και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες  $(\epsilon)$  και  $(\delta)$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{KBA} = \widehat{\Lambda\Gamma A}$ . (Μονάδες 8)

β)  $(\epsilon) \parallel (\delta)$ . (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο  $K\Gamma\Lambda B$  θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



Θέμα 13846

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το παρακάτω σχήμα με τους κύκλους  $(A, \rho)$  και  $(B, R)$  με  $R > \rho$ . Επίσης  $AB = 9$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $R + \rho < 9$ . (Μονάδες 7)

β) Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο  $KLM$  με  $KL$  να είναι ίση με  $\rho$  και η πλευρά  $LM$  να είναι ίση με  $R$ . Να περιγράψετε τον τρόπο που το σχεδιάσατε και να αποδείξετε ότι η τρίτη πλευρά του είναι μικρότερη από 9.

(Μονάδες 10)

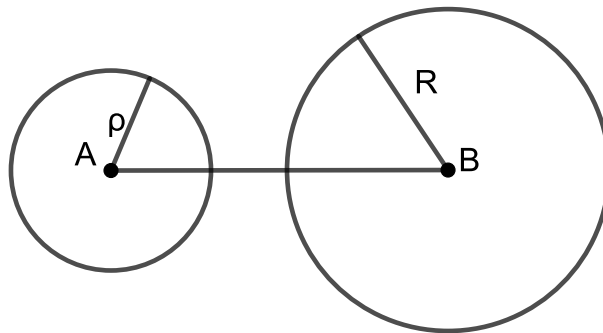
γ) Έστω το τρίγωνο  $KLM$  που σχεδιάσατε στο β) ερώτημα. Πόσα σημεία του επιπέδου έχουν και τις δύο ιδιότητες  $I_1$  και  $I_2$  που περιγράφονται παρακάτω;

$I_1$ : «Η απόσταση των σημείων από το  $K$  είναι ίση με  $\rho$ ».

$I_2$ : «Η απόσταση των σημείων από το  $M$  είναι ίση με  $R$ ».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

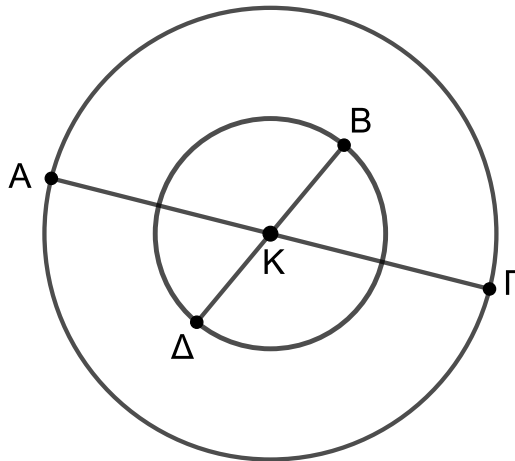
(Μονάδες 8)



Θέμα 13848

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο Κ και οι ΑΓ και ΒΔ είναι διάμετροί τους.



α) Αν ισχύει  $ΑΓ > ΒΔ$ :

i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις ΑΓ και ΒΔ, ώστε το ΑΒΓΔ να είναι ρόμβος.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:

«Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο».

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

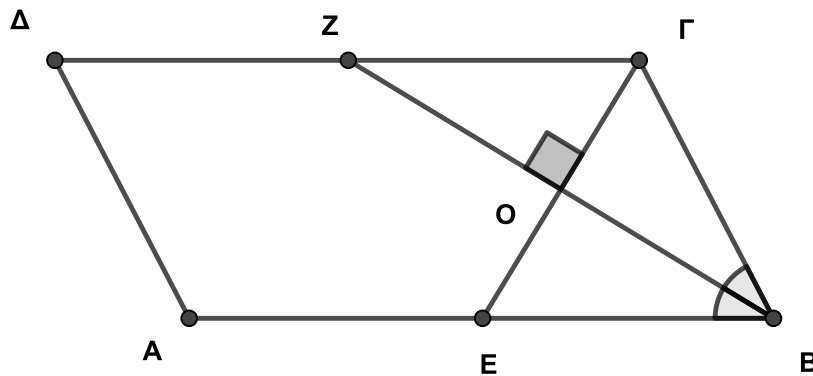
(Μονάδες 8)

Θέμα 13850

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος και η  $BZ$  διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B}$ . Φέρουμε  $GO$  κάθετη στη  $BZ$  και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $E$ .

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $EB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $OZ\Gamma$  και  $OBE$  είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $EB\Gamma Z$  είναι ρόμβος (Μονάδες 6)
- δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας  $\widehat{B}$  ώστε το τετράπλευρο  $EB\Gamma Z$  να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 4)



Θέμα 13851

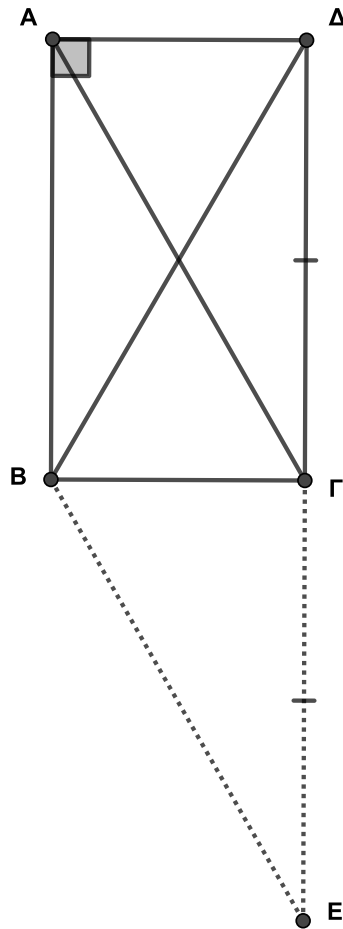
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $\Delta\Gamma$  προς το μέρος του  $\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma\epsilon = \Delta\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $A\Gamma\epsilon B$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta\epsilon$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

γ) Αν  $\widehat{\Delta\beta\epsilon} = 120^\circ$  να αποδείξετε ότι  $B\Delta = 2A\Delta$ . (Μονάδες 9)

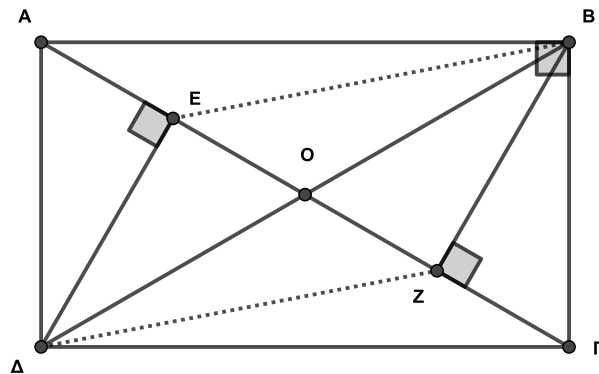


Θέμα 13852

ΘΕΜΑ 4

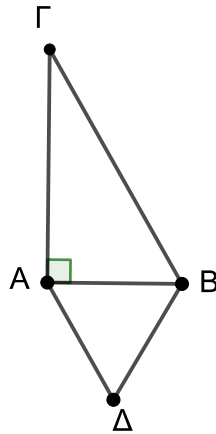
Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB > A\Delta$  και με κέντρο  $O$ . Αν  $BZ$  και  $\Delta E$  είναι οι αποστάσεις των κορυφών  $B$  και  $\Delta$  από τη διαγώνιο  $A\Gamma$ , τότε:

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Delta EO$  και  $BZO$  είναι ίσα. (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $EBZ\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- γ) Αν  $\widehat{\Delta A E} = 60^\circ$  και  $OE = 5$ , να βρείτε το μήκος της πλευράς  $A\Delta$ . (Μονάδες 12)



Θέμα 13853

## ΘΕΜΑ 4



Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ . Επίσης οι  $AD$  και  $B\Gamma$  είναι παράλληλες και το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισόπλευρο.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 8)

β) Αν η περίμετρος του  $AB\Delta$  είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 7)

γ) Αν το σημείο  $K$  είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το  $A\Delta BK$  να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου  $K$ . Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το  $A\Delta BK$ ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 10)

Θέμα 13854

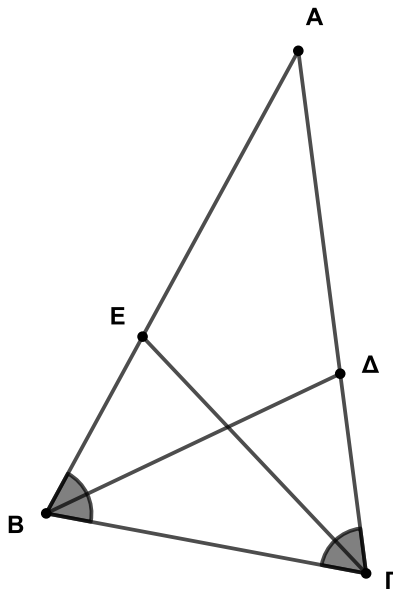
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ). Θεωρούμε τις διχοτόμους  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$ , αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta=\Gamma E$ . (Μονάδες 9)

β) Από τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  φέρνουμε κάθετες  $E\Lambda$  και  $\Delta K$  στις πλευρές  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:  $\Delta K=E\Lambda$ . (Μονάδες 9)

γ) Να εντοπίσετε και να σχεδιάσετε σημείο  $Z$  της πλευράς  $B\Gamma$  που η απόστασή του από το σημείο  $E$  να ισούται με την απόσταση των σημείων  $\Delta$  και  $K$  αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



Θέμα 13855

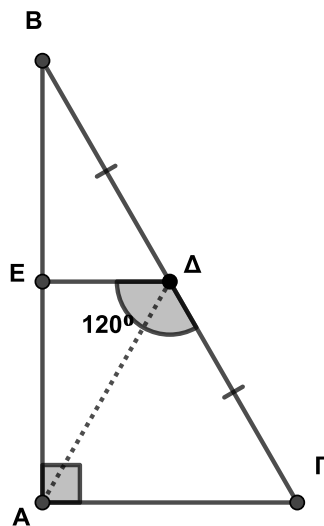
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{A}=90^\circ$ . Από το μέσο  $\Delta$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά  $A\Gamma$  που τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $E$ . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι  $\widehat{E\Delta\Gamma}=120^\circ$ , τότε:

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\widehat{\Delta\Gamma A}$ . (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

γ) Προεκτείνουμε την πλευρά  $A\Gamma$  προς το  $\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma Z=A\Gamma$  και την πλευρά  $B\Gamma$  προς το  $\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma H=\frac{B\Gamma}{2}$ . Να αποδείξετε ότι  $\widehat{A\hat{H}Z}=90^\circ$ . (Μονάδες 12)



Θέμα 13856

## ΘΕΜΑ 4

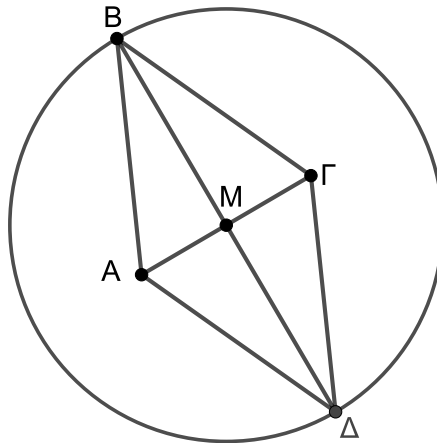
Σε τρίγωνο  $\Delta EZ$ , φέρουμε τη διάμεσο  $\Delta M$  και στην προέκτασή της προς το μέρος του  $M$  παίρνουμε σημείο  $\Theta$  έτσι ώστε  $\Delta M = M\Theta$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $EZ$  προς το  $E$  κατά τμήμα  $EA = EZ$  και προς το  $Z$  κατά τμήμα  $Z\Gamma = EZ$ .

- α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Delta AM$  και  $\Theta GM$  είναι ίσα. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Theta A\Delta\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- γ) Στο σχήμα της άσκησης που κατασκεύασε στο τετράδιό του ο Γιάννης είναι  $A\Delta = 12$ . Πόσο θα είναι το μήκος της διαμέσου  $EH$  του τριγώνου  $\Delta EZ$  στο σχήμα του Γιάννη; (Μονάδες 9)

Θέμα 13857

ΘΕΜΑ 4

α) Στο σχήμα η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΓ και διάμετρος του κύκλου με κέντρο Μ. Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)



β) Χαρακτηρίστε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις ως αληθή ή ψευδή.

Πρόταση 1: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι μεσοκάθετος της άλλης διαγωνίου και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

Πρόταση 2: «Αν η διαγώνιος ενός τυχαίου τετραπλεύρου είναι κάθετη στην άλλη διαγώνιο και διάμετρος κύκλου με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίων, τότε το τετράπλευρο είναι ρόμβος».

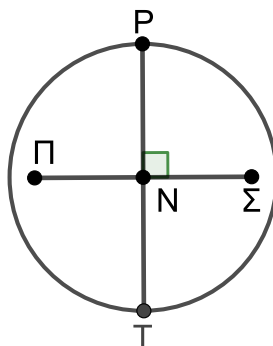
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.

(Μονάδες 10)

γ) Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΤ και ΠΣ τέμνονται κάθετα στο Ν και  $ΠΝ = ΝΣ$ . Επίσης η ΡΤ είναι διάμετρος του κύκλου με κέντρο το Ν.

Να αποδείξετε ότι  $ΠΡ = ΡΣ = ΣΤ = ΤΠ$ .

(Μονάδες 7)



Θέμα 14566

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ . Αν τα σημεία Ε, Ζ, Μ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ, και ΑΓ αντίστοιχως και το ΜΚ είναι κάθετο στην ΒΔ, να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο ΒΜΔ είναι ισοσκελές (μον. 5) και το Κ είναι το μέσο του ΒΔ (μον. 2)

(Μονάδες 7)

β)

i.  $EK = \frac{AD}{2}$ .

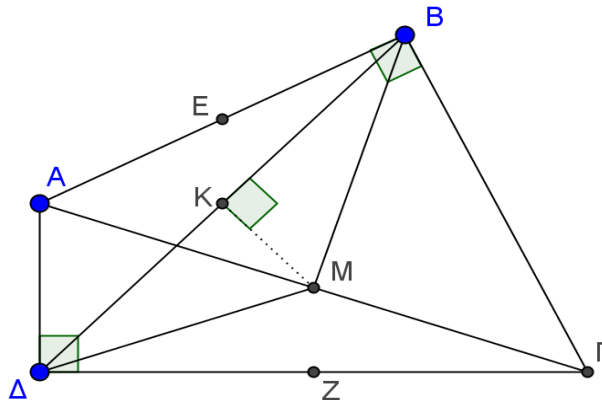
(Μονάδες 6)

ii.  $MZ = EK$ .

(Μονάδες 6)

γ) Το τετράπλευρο ΚΕΜΖ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 6)



## ΘΕΜΑ 2

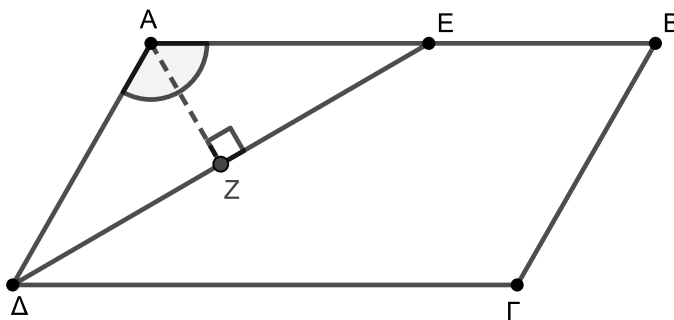
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με γωνία  $\widehat{A} = 120^\circ$  και  $AB=2A\Delta$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\Delta$  του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την  $AB$  στο  $E$ , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα  $AZ$  στη  $\Delta E$ . Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία  $\widehat{A\Delta E} = 30^\circ$

(Μονάδες 10)

β)  $AZ = \frac{AB}{4}$

(Μονάδες 15)

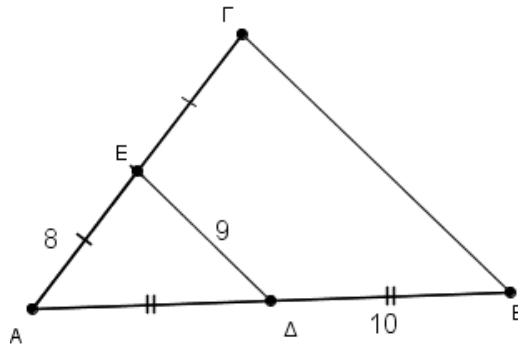


Θέμα 14877

## ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του παρακάτω σχήματος τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα,  $AE=8$ ,  $E\Delta=9$  και  $\Delta B=10$ .

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta E\Gamma B$  είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)
- β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $B\Gamma$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να συγκρίνετε τις περιμέτρους του τριγώνου  $AB\Gamma$  και του τετραπλεύρου  $\Delta E\Gamma B$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 14879

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρουμε ΑΕ κάθετη στη ΒΔ. Έστω Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι :

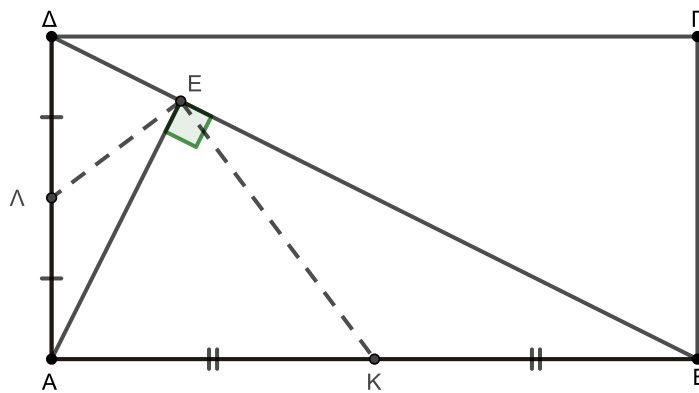
i.  $\widehat{ΚΕΛ} = 90^\circ$  .

ii.  $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$  .

(Μονάδες 16)

β) Αν  $\widehat{ΒΑΓ} = 30^\circ$  , να αποδείξετε ότι  $ΚΛ = ΒΓ$ .

(Μονάδες 9)



Θέμα 14880

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = A\Delta$  και  $\Gamma B = \Gamma\Delta$ . Αν  $E$  είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των  $BA$  και  $\Gamma\Delta$  και  $Z$  το σημείο τομής των προεκτάσεων των  $\Delta A$  και  $\Gamma B$  να αποδείξετε ότι:

α) Η  $\Gamma A$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $B\Gamma\Delta$ .

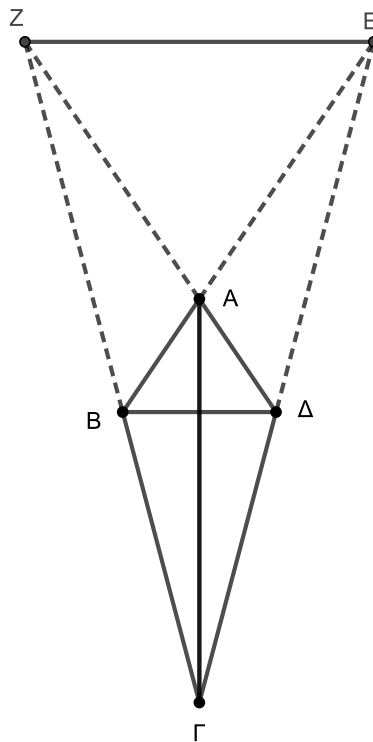
(Μονάδες 7)

β)  $\Gamma Z = \Gamma E$

(Μονάδες 9)

γ)  $EZ \parallel B\Delta$

(Μονάδες 9)



Θέμα 14881

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και  $AM$  η διάμεσός του. Από το  $M$  φέρουμε  $MK$  κάθετη στην  $AB$  και  $ML$  κάθετη στην  $A\Gamma$ . Αν  $N, P$  είναι τα μέσα των  $BM$  και  $\Gamma M$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α)  $\widehat{NKM} = \widehat{N\hat{M}K}$  (Μονάδες 7)
- β) Η  $MK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $NMA$ . (Μονάδες 9)
- γ)  $AM = KN + LP$ . (Μονάδες 9)

Θέμα 14882

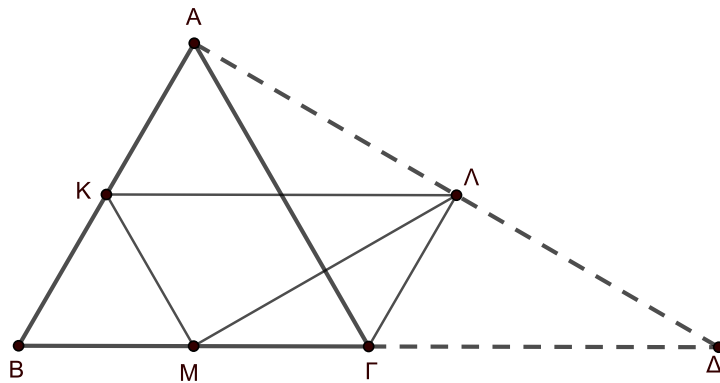
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε τμήμα  $\Gamma\Delta = B\Gamma$ . Αν  $M$ ,  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$ ,  $AB$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα τότε:

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Lambda\Delta$ . (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τετράπλευρο  $K\Lambda\Gamma M$  είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)
- ii. Το τρίγωνο  $KM\Lambda$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)



Θέμα 14883

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου  $O$  φέρουμε τις διαμέτρους του  $ΑΓ$  και  $ΒΔ$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Τί είδους γωνία σχηματίζουν οι διάμετροι  $ΑΓ$  και  $ΒΔ$  αν το  $ΑΒΓΔ$  είναι τετράγωνο;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

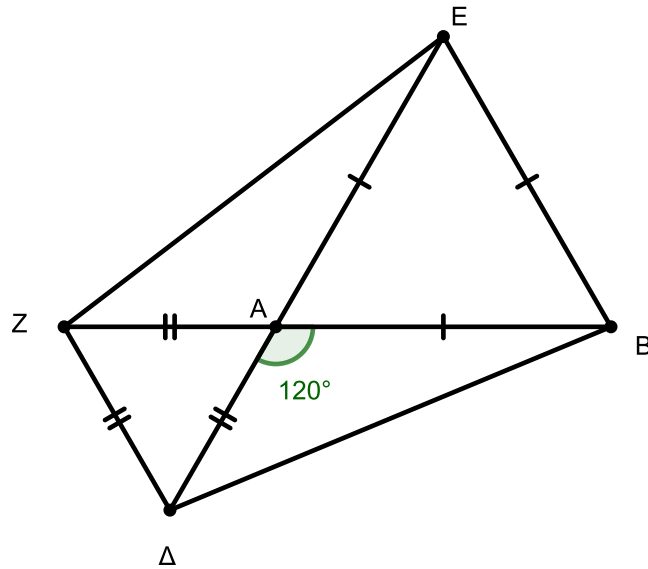
Θέμα 14884

ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο  $AB\Delta$  με  $\hat{A} = 120^\circ$ . Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα  $AEB$  και  $AZ\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $AEZ$  και  $AB\Delta$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)  
 β) Το τμήμα  $\Delta Z$  είναι παράλληλο στο  $BE$ . (Μονάδες 12)



Θέμα 14885

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Προεκτείνουμε το ύψος του  $AH$  κατά τμήμα  $H\Delta=AH$  και τη διάμεσό του  $AM$  κατά τμήμα  $ME=AM$ . Να αποδείξετε ότι:

α)

- i.  $AB = \Gamma E$
- ii.  $AB = B\Delta$

(Μονάδες 8)

β)  $\widehat{B\Delta} = \widehat{B\Gamma E}$

(Μονάδες 8)

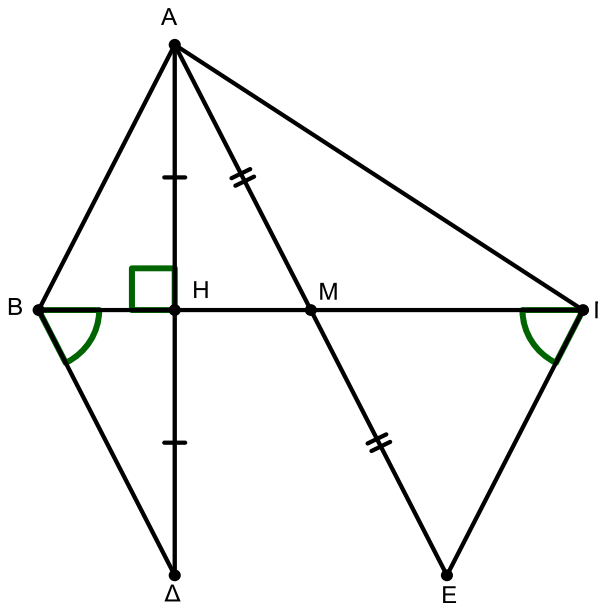
γ)

- i. Εξετάστε αν το τμήμα  $B\Delta$  μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα  $\Gamma E$ .

(Μονάδες 5)

- ii. Ποιο είναι το είδος του τετραπλεύρου  $B\Gamma E\Delta$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)



Θέμα 14886

## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  ( $\hat{Α} = 90^\circ$ ), τα μέσα  $Δ, Ε, Ζ$  των πλευρών του και το ύψος του  $ΑΚ$ . Αν  $Θ$  είναι το σημείο τομής των  $ΑΖ$  και  $ΔΕ$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο  $ΑΔΖΕ$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

ii.  $ΑΘ = ΘΕ = \frac{ΒΓ}{4}$  (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον είναι  $\hat{Γ} = 30^\circ$ , τότε:

i. να βρείτε τη γωνία  $ΑΖΒ$ . (Μονάδες 5)

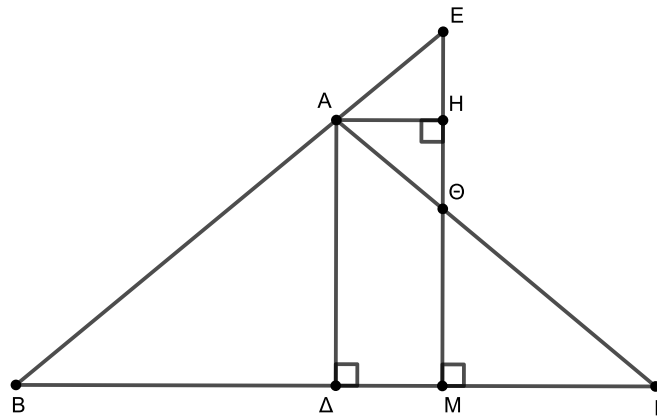
ii. να αποδείξετε ότι  $ΒΚ = \frac{ΒΓ}{4}$ . (Μονάδες 5)

Θέμα 14887

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ), και τυχαίο σημείο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ . Από το σημείο  $M$  φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά  $B\Gamma$  που τέμνει τις ευθείες  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $\Theta$  αντίστοιχα. Αν  $A\Delta$  και  $AH$  τα ύψη των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A\Theta E$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α)  $\widehat{\Delta A H} = 90^\circ$ . (Μονάδες 8)  
 β) Το τρίγωνο  $A\Theta E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)  
 γ)  $M\Theta + ME = 2A\Delta$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 14888

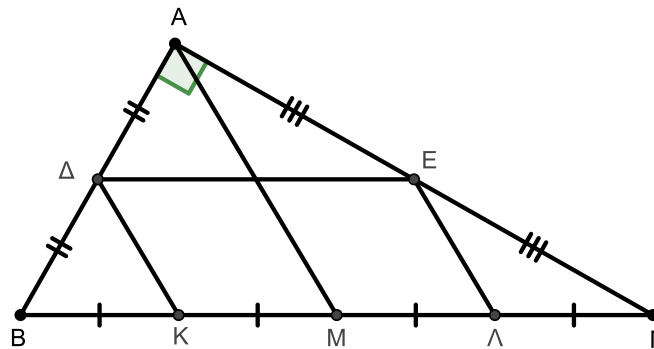
ΘΕΜΑ 4

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ . Στην πλευρά  $B\Gamma$  θεωρούμε τα σημεία  $K, M, \Lambda$  ώστε  $BK=KM=ML=\Lambda\Gamma$ . Αν τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $\Delta E\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

β) Το τετράπλευρο  $K\Delta A M$  είναι τραπέζιο και η διάμεσός του ισούται με  $\frac{3}{8} B\Gamma$ .

(Μονάδες 12)



Θέμα 34313

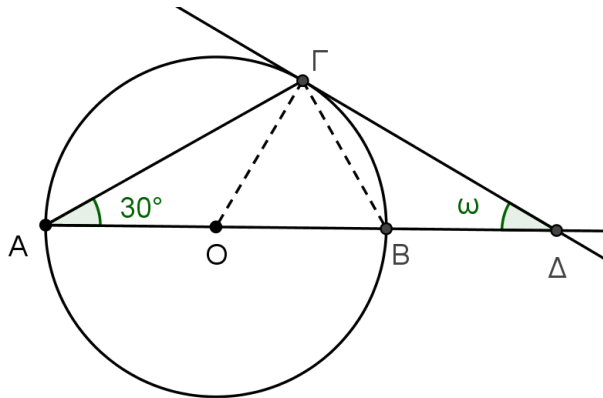
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  διαμέτρου  $AB$ , και χορδή του  $A\Gamma$  τέτοια ώστε  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$ . Στο σημείο  $\Gamma$  του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου  $AB$  (προς το  $B$ ) σε σημείο  $\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Gamma O\Delta$  είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας του  $\widehat{O\hat{\Gamma}\Delta}$ . (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\hat{\omega}$ . (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι  $O\Delta = 2R$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 34314

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε δυο ίσους κύκλους  $(O, \rho)$  και  $(K, \rho)$  τεμνόμενους στα σημεία  $A$  και  $\Delta$ , με τα κέντρα τους  $O$  και  $K$  να βρίσκονται σε ευθεία  $(\varepsilon)$  που τέμνει τον κύκλο  $(O, \rho)$  σε σημείο  $B$ , και τη διάκεντρό τους  $OK$  να είναι ίση με  $\rho$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο  $OAK$  είναι ισόπλευρο,

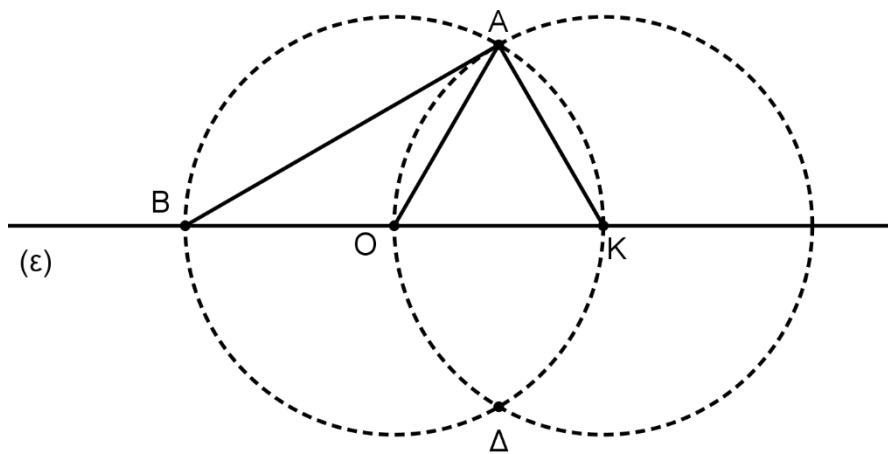
(Μονάδες 7)

ii. το τρίγωνο  $ABK$  είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $ABK$ .

(Μονάδες 9)



Θέμα 34315

## ΘΕΜΑ 2

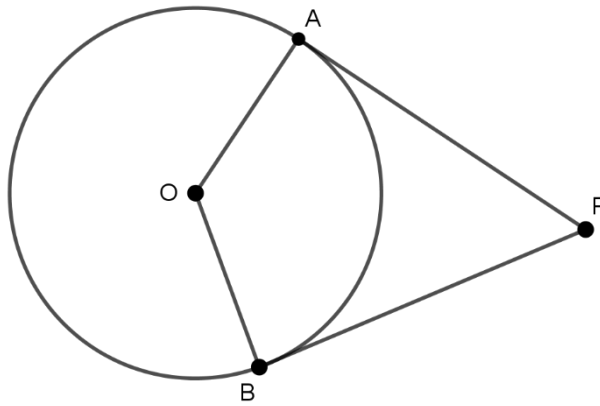
Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και ακτίνας  $4\text{ cm}$  και εξωτερικό του σημείο  $P$ . Έστω  $PA, PB$  τα εφαπτόμενα τμήματα που φέρονται από το  $P$ , τα σημεία επαφής τους  $A, B$  με τον κύκλο αντίστοιχα και τέτοια ώστε η γωνία  $\widehat{APB}$  να ισούται με  $60^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι το μέτρο της γωνίας  $\widehat{AOB}$  είναι ίσο με  $120^\circ$ . (Μονάδες 7)

β) Αν  $PO$  η διακεντρική ευθεία του σημείου  $P$ , τότε να υπολογίσετε:

i. το μέτρο της γωνίας  $\widehat{APO}$ , (Μονάδες 9)

ii. το μήκος του τμήματος  $OP$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 34316

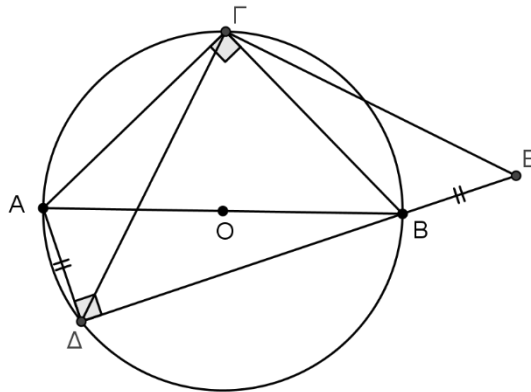
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και διάμετρος του  $AB$ . Έστω  $\Gamma$  το μέσο ενός ημικυκλίου του,  $\Delta$  τυχαίο σημείο του άλλου ημικυκλίου του και  $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{A\Delta B} = 90^\circ$ . Στην προέκταση της  $\Delta B$  προς το μέρος του  $B$  θεωρούμε σημείο  $E$  ώστε  $BE = AD$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. οι γωνίες  $\widehat{\Gamma\Delta A}$  και  $\widehat{\Gamma B E}$  είναι ίσες, (Μονάδες 6)
- ii. τα τρίγωνα  $A\Delta\Gamma$  και  $B E\Gamma$  είναι ίσα, (Μονάδες 7)
- iii. η  $\Gamma\Delta$  είναι κάθετη στην  $\Gamma E$ . (Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί, στην περίπτωση που το σημείο  $\Delta$  είναι αντιδιαμετρικό του  $\Gamma$ , η  $\Gamma E$  είναι εφαπτόμενη του κύκλου. (Μονάδες 6)



Θέμα 34318

## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο  $(O, \rho)$  και  $E$  το μέσο του τόξου του  $B\Gamma$ . Μια ευθεία  $(\varepsilon)$  εφάπτεται στον κύκλο στο  $E$ . Οι προεκτάσεις των  $OB, O\Gamma$  (προς το  $B$  και το  $\Gamma$  αντίστοιχα) τέμνουν την ευθεία  $(\varepsilon)$  στα σημεία  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα.

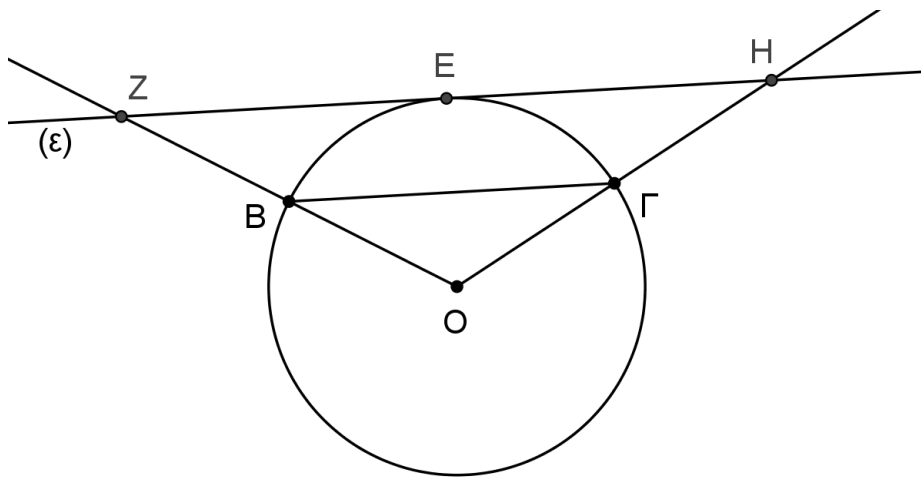
α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $B\Gamma \parallel (\varepsilon)$  (Μονάδες 9)

ii.  $OZ = OH$  (Μονάδες 9)

β) Αν το σημείο  $B$  είναι το μέσο του  $OZ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $ZOH$ .

(Μονάδες 7)



Θέμα 34320

## ΘΕΜΑ 4

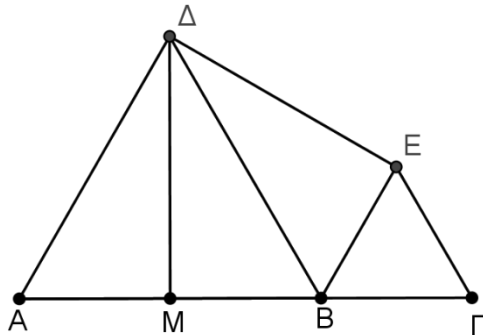
Έστω Α, Β και Γ συνευθειακά σημεία με  $AB = 2BG$ . Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Προς το ίδιο ημιεπίεδο κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο με βάσεις τα τμήματα ΑΔ και ΒΕ, (Μονάδες 9)

β) τα τρίγωνα ΔΜΒ και ΔΕΒ είναι ίσα, (Μονάδες 8)

γ)  $\widehat{\Delta MB} + \widehat{\Delta EB} = 180^\circ$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 34321

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $AD$ ,  $BE$  τα ύψη του.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $B\Gamma = 2ED$ ,

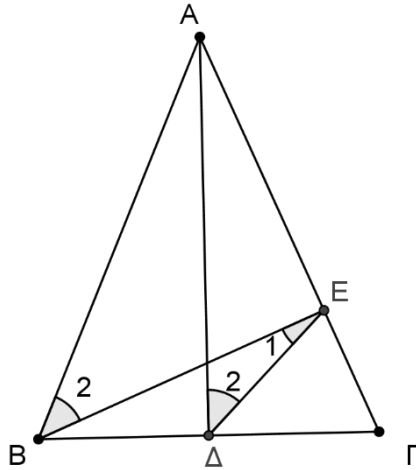
(Μονάδες 7)

β)  $\hat{E}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ ,

(Μονάδες 9)

γ)  $\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2$

(Μονάδες 9)



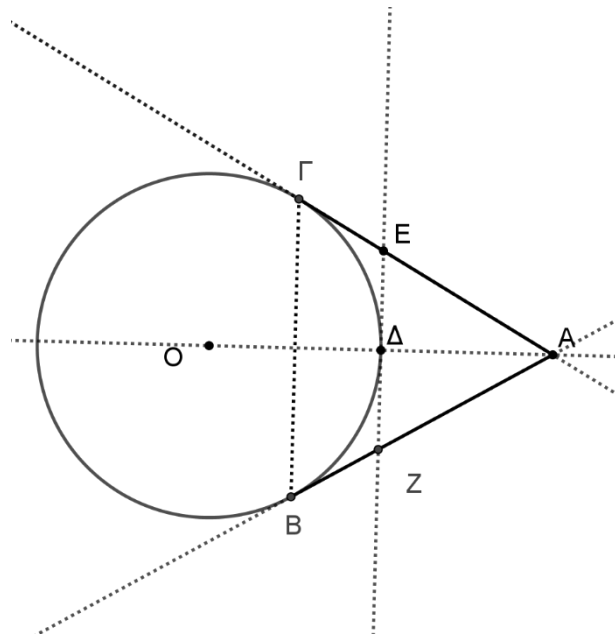
Θέμα 34324

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και ακτίνας  $\rho$ . Από σημείο  $A$  εξωτερικό του κύκλου θεωρούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου που εφάπτονται σε αυτόν στα σημεία  $B, \Gamma$  και τέτοιες ώστε, η γωνία  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$  που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$  να είναι  $60^\circ$ . Έστω ότι η ευθεία  $AO$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $\Delta$  και η εφαπτόμενη του κύκλου στο  $\Delta$  τέμνει τα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $Z$  και  $E$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- |   |             |
|---|-------------|
| α) $OA=2\rho$ ,   | (Μονάδες 6) |
| β) το τρίγωνο $AZE$ είναι ισόπλευρο,                    | (Μονάδες 5) |
| γ) $AZ = 2ZB$ ,   | (Μονάδες 7) |
| δ) το τετράπλευρο $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. | (Μονάδες 7) |



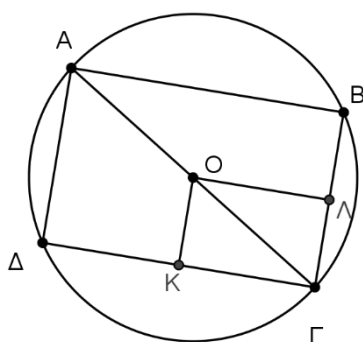
Θέμα 34326

## ΘΕΜΑ 4

Έστω κύκλος κέντρου  $O$  και  $A\Gamma$  μια διάμετρος του. Θεωρούμε δυο ίσες χορδές  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  και χορδές  $\Delta\Gamma$ ,  $AB$  τέτοιες ώστε να είναι κάθετες στις  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Έστω  $K$  και  $\Lambda$  τα μέσα των χορδών  $\Delta\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) οι χορδές  $AB$  και  $\Delta\Gamma$  είναι παράλληλες, (Μονάδες 7)  
β) το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 7)  
γ) η  $B\Delta$  είναι διάμετρος του κύκλου, (Μονάδες 6)  
δ) το τετράπλευρο  $OK\Gamma\Lambda$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)



Θέμα 34328

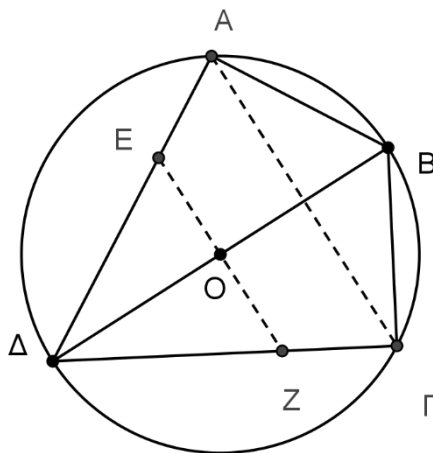
ΘΕΜΑ αριθμός

Δίνεται τετράπλευρο με κορυφές σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$  κύκλου  $(O, \rho)$ , διαγώνιες  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ , με τη  $B\Delta$  να διέρχεται από το κέντρο  $O$  του κύκλου, και με ίσες πλευρές τις  $AB$  και  $B\Gamma$ . Έστω ότι η κάθετη στη  $B\Delta$  στο σημείο  $O$  τέμνει τις πλευρές  $A\Delta$  και  $\Gamma\Delta$  του τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, οι γωνίες του  $\hat{A}$  και  $\hat{\Gamma}$  είναι ορθές και η γωνία του  $\hat{B}$  είναι διπλάσια της γωνίας του  $\hat{\Delta}$ .

α) Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών  $\hat{B}$  και  $\hat{\Delta}$  του  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι:

- i. η διαγώνιος  $B\Delta$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{\Delta}$  του  $AB\Gamma\Delta$ , (Μονάδες 7)
- ii. το τετράπλευρο  $AB\Gamma O$  είναι ρόμβος, (Μονάδες 6)
- iii. το τετράπλευρο  $A\Gamma Z E$  είναι τραπέζιο. (Μονάδες 6)



Θέμα 34329

ΘΕΜΑ 4

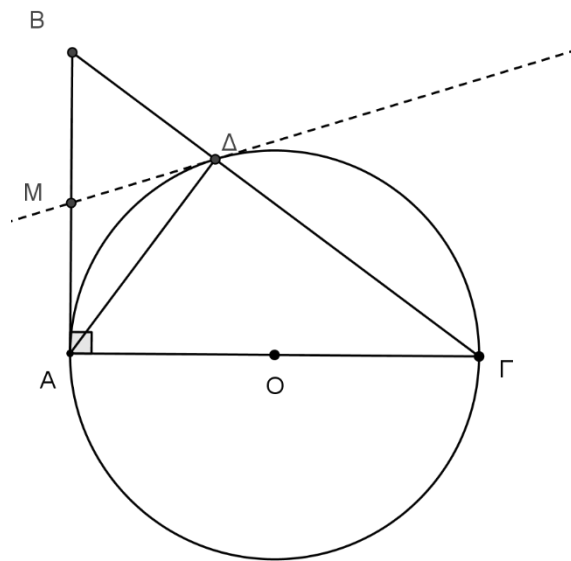
Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Με διάμετρο την κάθετη πλευρά του  $A\Gamma$  φέρουμε κύκλο κέντρου  $O$ , ο οποίος τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου σε σημείο  $\Delta$ . Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο  $\Delta$  τέμνει την πλευρά  $AB$  σε σημείο  $M$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{\Gamma\Delta\Delta} = \hat{B}$ , (Μονάδες 9)

β)  $\hat{M\Delta B} = 90^\circ - \hat{\Gamma}$  και το τρίγωνο  $\Delta MB$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 9)

γ) το  $M$  είναι το μέσο του  $AB$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 34330

## ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $\Delta B\Gamma$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ) με τις κορυφές τους  $A$  και  $\Delta$  εκατέρωθεν της  $B\Gamma$  και το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $AM\Delta$  είναι ισοσκελές,

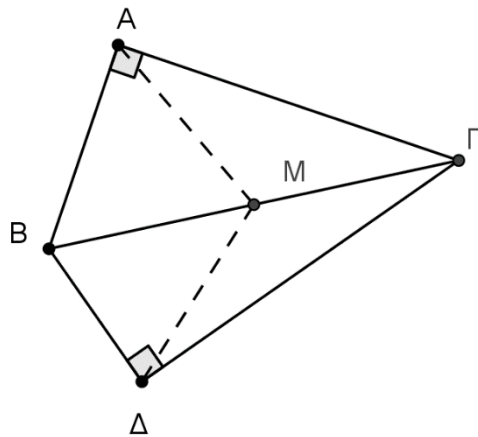
(Μονάδες 9)

β)  $\widehat{AM\Delta} = 2\widehat{A\Gamma\Delta}$ ,

(Μονάδες 9)

γ) τα  $A, B, \Delta$  και  $\Gamma$  είναι σημεία ενός κύκλου, τον οποίο και να κατασκευάσετε.

(Μονάδες 7)



Θέμα 34331

## ΘΕΜΑ 4

Σε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB < A\Gamma$ ) φέρουμε το ύψος  $AD$ . Έστω  $K, \Lambda, M$  τα μέσα των  $AB, A\Gamma, B\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $K\Lambda \parallel B\Gamma$  (Μονάδες 5)

β)

i.  $M\Lambda = K\Delta$  (Μονάδες 6)

ii. Το τετράπλευρο  $K\Lambda M\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

γ) Οι γωνίες  $\widehat{K\Delta\Lambda}$  και  $\widehat{K\Lambda M}$  είναι ίσες. (Μονάδες 6)

Θέμα 34332

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται τα ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $E\Gamma\Delta$  με  $AB = A\Gamma = E\Gamma = E\Delta$ , όπου  $\Delta$  είναι το μέσο της  $A\Gamma$  και  $B\Gamma = \frac{AB}{2}$ . Έστω  $Z$  το σημείο στο οποίο η προέκταση της  $E\Delta$  προς το  $\Delta$  τέμνει την  $AB$ .

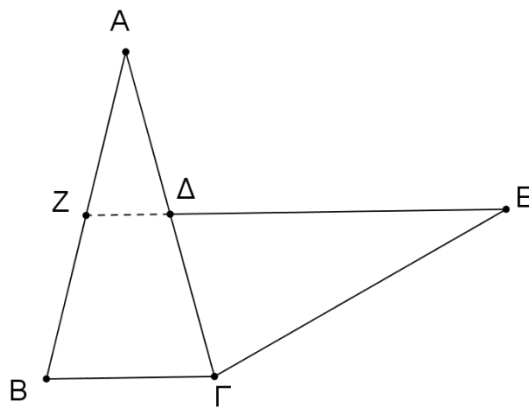
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Gamma\Delta E$  είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) το σημείο  $Z$  είναι το μέσο της  $AB$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 34333

## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 2AB$ . Έστω  $\Delta$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$  και  $E$  το μέσο του τμήματος  $BD$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την  $AG$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $Z$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα  $ABE$  και  $BZ\Delta$  είναι ίσα, (Μονάδες 7)
- β) η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{E\Delta\Gamma}$ , (Μονάδες 9)
- γ) το τετράπλευρο  $A\Delta EZ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

Θέμα 34334

## ΘΕΜΑ 4

Σε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ ) θεωρούμε τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  των πλευρών  $AB$ ,  $A\Gamma$ ,  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Έστω  $H$  η προβολή της κορυφής  $\Gamma$  πάνω στην πλευρά  $AB$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $HE = E\Gamma$  και  $HZ = Z\Gamma$ , (Μονάδες 8)

β) το τετράπλευρο  $\Delta E\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 8)

γ)  $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{H}E$ . (Μονάδες 9)

Θέμα 34335

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος  $(O,R)$  και μία ευθεία  $\chi\chi$  η οποία έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο το σημείο  $A$ . Θεωρούμε τυχαίο σημείο  $M$  της ημιευθείας  $A\chi$ . Αν για κάποιο σημείο  $B$  του κύκλου ισχύει η σχέση  $MA = MB$ , να αποδείξετε ότι:

α) το  $MB$  είναι εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου  $(O,R)$  (Μονάδες 9)

β) η διχοτόμος της γωνίας  $BM\chi$  είναι κάθετη στη  $MO$ , (Μονάδες 9)

γ) το ευθύγραμμο τμήμα  $OB$  τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας  $BM\chi$ . (Μονάδες 7)

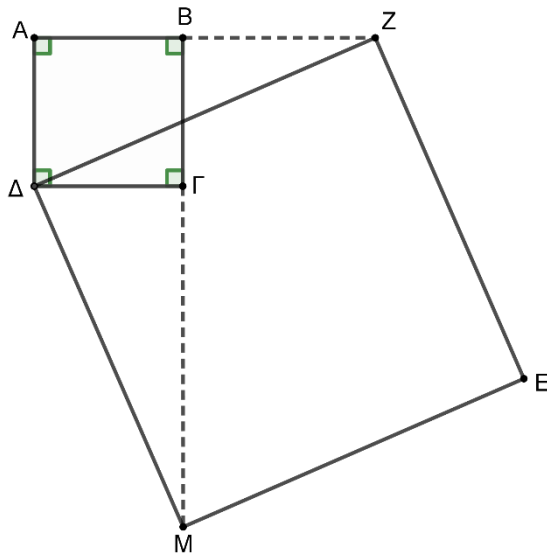
Θέμα 34336

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τετράγωνο  $ΑΒΓΔ$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $ΑΒ$  προς το  $Β$  κατά τμήμα  $ΒΖ$  και την πλευρά  $ΒΓ$  προς το  $Γ$  κατά τμήμα  $ΓΜ = ΑΖ$ . Θεωρούμε σημείο  $Ε$  τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο  $ΔΜΕΖ$  να είναι παραλληλόγραμμο.

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα  $ΑΔΖ$  και  $ΓΔΜ$  είναι ίσα και οι γωνίες  $Α\hat{Δ}Ζ$  και  $Γ\hat{Δ}Μ$  είναι ίσες, (Μονάδες 9)
- β) το τετράπλευρο  $ΔΜΕΖ$  είναι τετράγωνο, (Μονάδες 9)
- γ) οι γωνίες  $Β\hat{Ζ}Ε$  και  $Ε\hat{Μ}Β$  είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 7)



Θέμα 34385

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ). Στο μέσο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$  φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την  $AG$  στο  $E$ . Από το  $E$  φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση  $B\Gamma$  που τέμνει την  $AB$  στο  $Z$ .

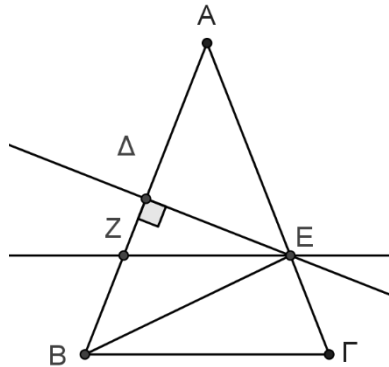
Να αποδείξετε ότι:

α)  $AE= BE$ ,

(Μονάδες 15)

β) το τετράπλευρο  $B\Gamma EZ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



Θέμα 34386

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  με  $ΑΒ=2ΒΓ$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $ΑΔ$  (προς το μέρος του  $Δ$ ) κατά τμήμα  $ΔΕ=ΑΔ$  και φέρουμε την  $ΒΕ$  που τέμνει τη  $ΔΓ$  στο σημείο  $Η$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $ΒΑΕ$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 7)

β) το  $ΔΕΓΒ$  είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 9)

γ) η  $ΑΗ$  είναι διάμεσος του  $ΒΑΕ$  τριγώνου. (Μονάδες 9)

Θέμα 34387

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και οι διχοτόμοι του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $B\Gamma\Delta$  και  $\Gamma B E$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Έστω  $E\text{H}$  και  $\Delta Z$  οι κάθετες από τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  αντίστοιχα στη  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι

$E\text{H} = \Delta Z$ . (Μονάδες 12)

Θέμα 34388

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του  $BM$  και  $\Gamma N$ . Προεκτείνουμε την  $BM$  (προς το  $M$ ) κατά τμήμα  $M\Delta=BM$  και την  $\Gamma N$  (προς το  $N$ ) κατά τμήμα  $NE=\Gamma N$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta//B\Gamma$  και  $AE//B\Gamma$ . (Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία  $E$ ,  $A$  και  $\Delta$  συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

Θέμα 34389

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και η διαγώνιός του  $ΒΔ$ . Από τις κορυφές  $A$  και  $Γ$  φέρουμε τις κάθετες  $AE$  και  $ΓZ$  στη  $ΒΔ$ , που την τέμνουν στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $AΔE$  και  $ΓBZ$  είναι ίσα, (Μονάδες 10)

β) το τετράπλευρο  $AEΓZ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

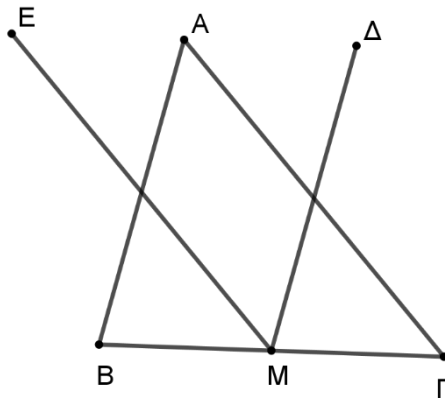
Θέμα 34391

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα  $M\Delta$  ίσο και παράλληλο προς την πλευρά  $BA$  και ευθύγραμμο τμήμα  $ME$  ίσο και παράλληλο προς την πλευρά  $GA$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Delta A = AE$ , (Μονάδες 8)  
β) τα σημεία  $\Delta$ ,  $A$  και  $E$  βρίσκονται στην ίδια ευθεία, (Μονάδες 9)  
γ)  $\Delta E = B\Gamma$ . (Μονάδες 8)



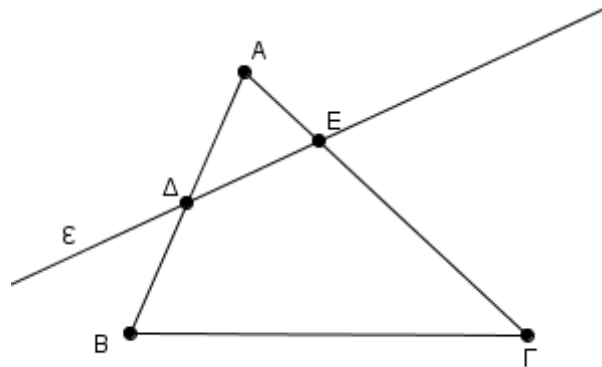
Θέμα 34392

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\Delta$  το μέσο της πλευράς  $AB$ . Από το  $\Delta$  διέρχεται μια τυχαία ευθεία ( $\epsilon$ ) που τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  σε εσωτερικό της σημείο  $E$ . Η ευθεία ( $\epsilon$ ) χωρίζει το τρίγωνο  $AB\Gamma$  σε ένα τρίγωνο  $ADE$  και σε ένα τετράπλευρο  $BDE\Gamma$ .

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου  $E$ , ώστε το τετράπλευρο  $BDE\Gamma$  να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του  $AB\Gamma$  τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)



Θέμα 34393

## ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$ , προεκτείνουμε την πλευρά  $ΔΑ$  (προς το  $A$ ) κατά τμήμα  $AH=ΔA$ .

Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}$ , η οποία τέμνει την  $AB$  στο σημείο  $Z$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $AΔZ$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο  $ΔZH$  είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία  $\hat{Z}$ . (Μονάδες 13)

Θέμα 34394

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται  $ABΓΔ$  παραλληλόγραμμο με  $AB=2AD$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\hat{A}$  του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την  $AB$  στο  $E$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ADE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο  $E$  μέσο της πλευράς  $AB$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

Θέμα 34395

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο  $E$  του τμήματος  $AO$  και σημείο  $Z$  του τμήματος  $O\Gamma$ , ώστε  $OE=OZ$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Delta E=BZ$ , (Μονάδες 12)

β) το  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

Θέμα 34396

## ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A=90^\circ$ ), η διχοτόμος τη γωνίας  $\hat{\Gamma}$  τέμνει την πλευρά  $AB$  σε σημείο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε προς την πλευρά  $B\Gamma$  μια κάθετη ευθεία, η οποία τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  σε σημείο  $E$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $A\Delta = \Delta E$ ,

(Μονάδες 13)

β)  $A\Delta < \Delta B$ .

(Μονάδες 12)

Θέμα 34397

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ . Φέρουμε τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στην πλευρά  $B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $BA=BE$ , (Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον  $B\hat{\Delta}A = 55^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\Gamma\Delta E$  (Μονάδες 13)

Θέμα 34398

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος  $A\Delta$  της γωνίας του  $\widehat{A}$ .

Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$ , (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, (Μονάδες 8)

γ)  $\Delta E = \frac{A\Gamma}{2}$ . (Μονάδες 9)

Θέμα 34399

## ΘΕΜΑ 2

Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) φέρουμε τη διχοτόμο  $A\Delta$  και μια ευθεία ( $\epsilon$ ) παράλληλη προς την  $B\Gamma$ , που τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $AG$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

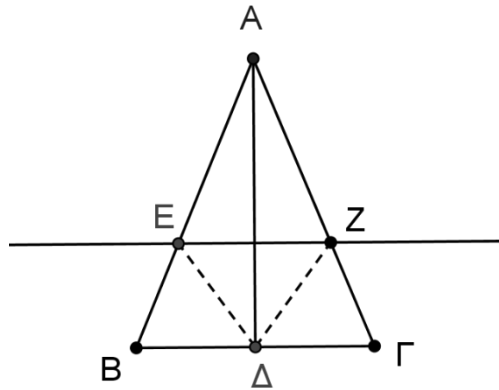
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $AEZ$  είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) τα τρίγωνα  $AE\Delta$  και  $AZ\Delta$  είναι ίσα.

(Μονάδες 13)



Θέμα 34401

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  ( $ΑΒ=ΑΓ$ ) και τα ύψη του  $ΒΔ$  και  $ΓΕ$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $ΒΔΓ$  και  $ΓΕΒ$  είναι ίσα,

(Μονάδες 15)

β)  $ΑΔ=ΑΕ$ .

(Μονάδες 10)

Θέμα 34404

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και το μέσο  $M$  της βάσης του  $B\Gamma$ . Φέρουμε τις αποστάσεις  $MK$  και  $ML$  του σημείου  $M$  από τις ίσες πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $MK=ML$ , (Μονάδες 13)

β) η  $AM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{KML}$ . (Μονάδες 12)

Θέμα 34405

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Από το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$  φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $M\Delta$  και  $ME$  στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $M\Delta = ME$

(Μονάδες 12)

β) το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)

Θέμα 34406

## ΘΕΜΑ 2

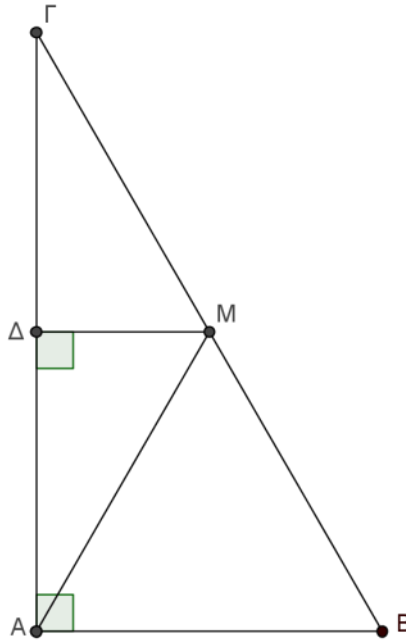
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $B\Gamma = 8$  cm. Έστω  $AM$  είναι διάμεσος του τριγώνου και  $M\Delta \perp A\Gamma$ . Αν η γωνία  $\hat{A}M\Gamma$  είναι ίση με  $120^\circ$ , τότε:

α) Να δείξετε ότι  $AB = 4$  cm.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της  $M\Delta$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 34408

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $AB > \Gamma\Delta$ ,  $B\Gamma = 4 \Delta\Gamma$  και  $\hat{B} = 60^\circ$  και  $\Gamma H \perp AB$ .

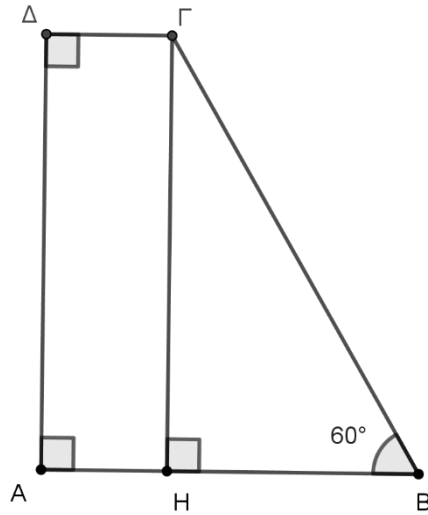
Να αποδείξετε ότι:

α)  $HB = 2\Delta\Gamma$ ,

(Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο  $AH\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο με  $AH = \frac{1}{2} HB$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 34409

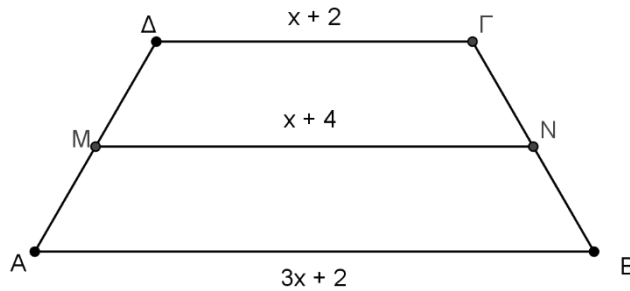
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AD = B\Gamma$ ), με  $AB > \Gamma\Delta$  και  $MN$  η διάμεσός του.

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι  $AB = 3x + 2$ ,  $\Gamma\Delta = x + 2$  και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι  $MN = x + 4$ , τότε να δείξετε ότι  $x = 2$ . (Μονάδες 10)

β) Αν η γωνία  $\hat{\Gamma}$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\hat{B}$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου.

(Μονάδες 15)



Θέμα 34411

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Στην προέκταση της  $BA$  (προς το μέρος της κορυφής  $A$ ) παίρνουμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AB = A\Delta$  και στην προέκταση της  $\Delta\Gamma$  (προς το μέρος της κορυφής  $\Gamma$ ) παίρνουμε σημείο  $E$  ώστε  $\Delta\Gamma = \Gamma E$ .

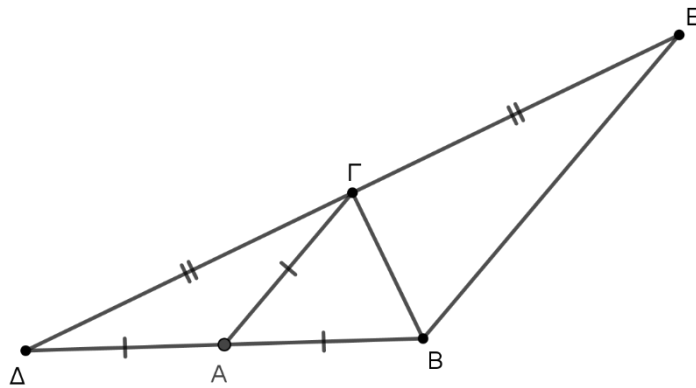
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $\Delta\Gamma B$  είναι ορθογώνιο,

(Μονάδες 12)

β)  $A\Gamma \parallel B\Gamma$  και  $A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 34413

## ΘΕΜΑ 2

Ένας μαθητής της Α' λυκείου βρήκε έναν τρόπο να κατασκευάζει παράλληλες ευθείες. Στην αρχή σχεδιάζει μια τυχαία γωνία  $\widehat{xOy}$ . Στη συνέχεια με κέντρο την κορυφή  $O$  της γωνίας σχεδιάζει δυο ομόκεντρους διαφορετικούς κύκλους με τυχαίες ακτίνες. Ο μικρότερος κύκλος τέμνει τις πλευρές  $Ox$  και  $Oy$  της γωνίας στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα και ο μεγαλύτερος στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα. Ισχυρίζεται ότι οι ευθείες που ορίζονται από τις χορδές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  είναι παράλληλες. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

(Μονάδες 25)

Θέμα 34415

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma}$  τέμνονται στο σημείο  $M$  και τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$ .

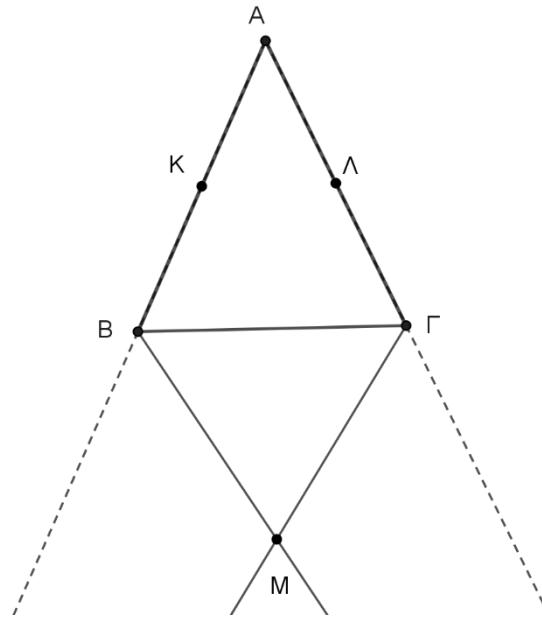
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $BM\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $MB=M\Gamma$ ,

(Μονάδες 12)

β)  $MK=M\Lambda$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 34418

## ΘΕΜΑ 2

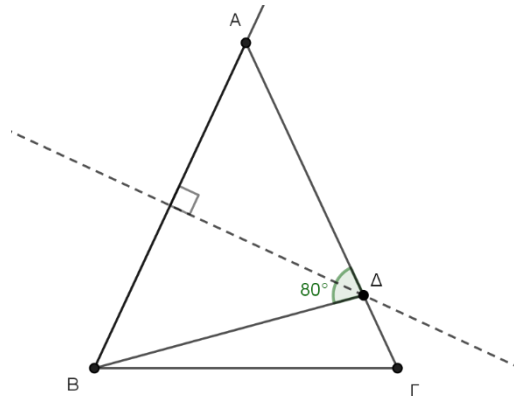
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  στο οποίο η εξωτερική γωνία  $A$  είναι διπλάσια της εσωτερικής γωνίας  $\widehat{A\Gamma B}$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB=AG$ . (Μονάδες 10)

β) Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς  $AB$  τέμνει την πλευρά  $AG$  σε εσωτερικό της σημείο  $\Delta$ .

Αν η γωνία  $\widehat{A\Delta B}$  είναι ίση με  $80^\circ$ , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 15)



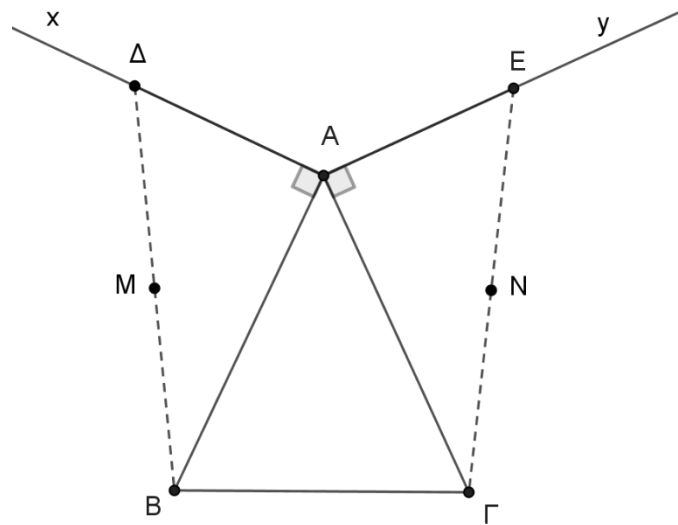
Θέμα 34420

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  τέτοιες ώστε  $Ax \perp AB$  και  $Ay \perp AG$ , όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Στις  $Ax$  και  $Ay$  θεωρούμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα, ώστε  $A\Delta=AE$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta=GE$ . (Μονάδες 12)

β) Αν  $M$  και  $N$  είναι τα μέσα των τμημάτων  $B\Delta$  και  $GE$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AMN$  είναι ισοσκελές (Μονάδες 13)



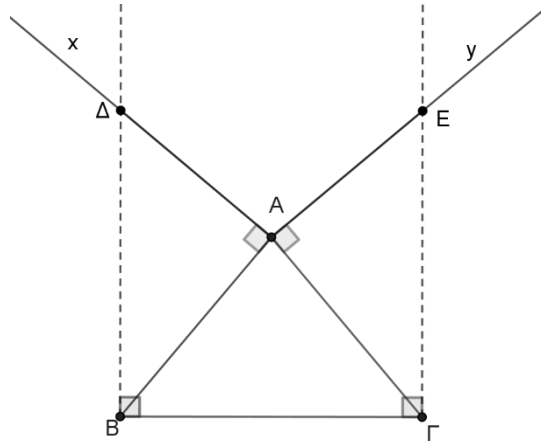
Θέμα 34422

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$ . Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  τέτοιες ώστε  $Ax \perp AB$  και  $Ay \perp AG$ , όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Οι κάθετες στην πλευρά  $B\Gamma$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  τέμνουν τις  $Ax$  και  $Ay$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ . (Μονάδες 12)

β) Αν η γωνία  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$  είναι ίση με  $80^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου που έχει για κορυφές τα σημεία  $A$ ,  $E$  και  $\Delta$ . (Μονάδες 13)



Θέμα 34423

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με  $AB=2BΓ$  και Ε το μέσο της πλευράς του ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 10)

β) η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{Δ}$ . (Μονάδες 15)

Θέμα 34424

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  ( $ΑΒ=ΑΓ$ ) και  $Ι$  το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών  $\hat{Β}$  και  $\hat{Γ}$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $ΒΙΓ$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες  $Α\hat{Ι}Γ$  και  $Α\hat{Ι}Β$  είναι ίσες, (Μονάδες 10)

γ) η ευθεία  $ΑΙ$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $ΒΓ$ . (Μονάδες 7)

Θέμα 34425

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσός του  $AM$ . Στην προέκταση της διαμέσου  $M\Delta$  του τριγώνου  $AM\Gamma$  (προς το  $\Delta$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  ώστε  $M\Delta = \Delta E$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο  $AM\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

β) η  $BE$  διέρχεται από το μέσο της διαμέσου  $AM$ . (Μονάδες 13)

Θέμα 34426

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και η διάμεσός του  $AM$ . Στο τρίγωνο  $AM\Gamma$  θεωρούμε τη διάμεσο  $M\Delta$  την οποία προεκτείνουμε προς το  $\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta E=\Delta M$ . Φέρουμε από το σημείο  $\Delta$  τμήμα  $\Delta Z$  κάθετο στην  $AM$ .

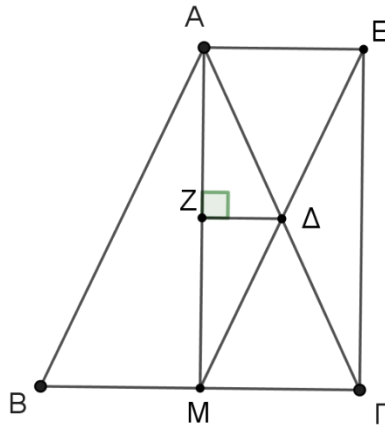
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο  $AM\Gamma E$  είναι ορθογώνιο,

(Μονάδες 12)

β)  $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{4}$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 34488

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ) με  $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$  και τα κάθετα τμήματα  $ΑΕ$ ,  $ΒΖ$  στη  $ΔΓ$ .

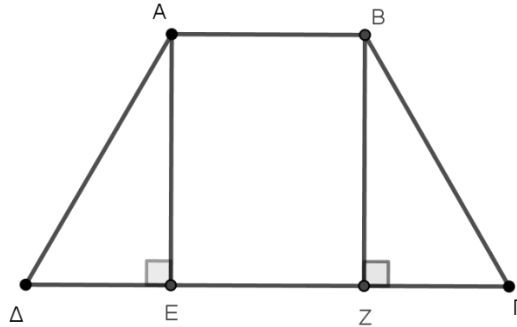
Να αποδείξετε ότι:

α)  $ΔΕ = ΓΖ$ ,

(Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο  $ΑΕΖΒ$  είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 13)



Θέμα 34491

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ). Από τα σημεία  $A$  και  $B$  φέρνουμε τα κάθετα τμήματα  $ΑΕ$  και  $ΒΖ$  αντίστοιχα στη  $ΔΓ$ .

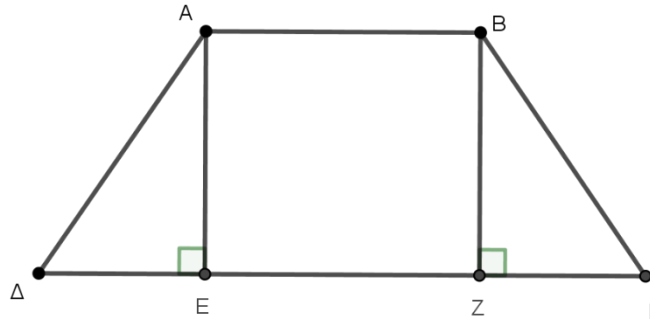
Να αποδείξετε ότι:

α)  $ΔΕ = ΓΖ$ ,

(Μονάδες 12)

β)  $ΑΖ = ΒΕ$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 34492

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $ΑΒΓ$  ( $ΑΒ=ΑΓ$ ), το ύψος του  $ΑΔ$  και τα μέσα  $Ε$  και  $Ζ$  των πλευρών του  $ΑΒ$  και  $ΑΓ$  αντίστοιχα.

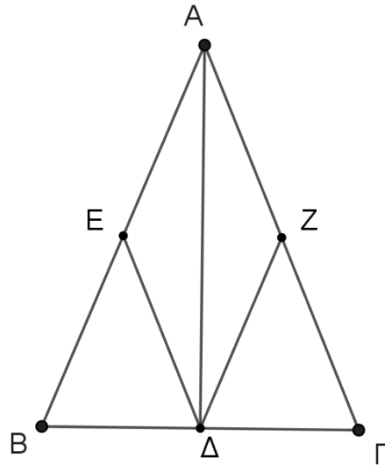
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $ΒΔΕ$  και  $ΓΔΖ$  είναι ίσα,

(Μονάδες 15)

β) το τετράπλευρο  $ΑΖΔΕ$  είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)



Θέμα 34493

## ΘΕΜΑ 2

Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ) και  $A'B'\Gamma'$  ( $A'B'=A'\Gamma'$ ).

α) Αν ισχύει  $AB = A'B'$  και  $\hat{A} = \hat{A}'$ , να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) Αν ισχύει  $A\Gamma = A'\Gamma'$  και  $\hat{B} = \hat{B}'$ , να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

Θέμα 34494

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $GA$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο  $\Delta BEZ$  είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 13)

β) η ευθεία  $\Delta Z$  διχοτομεί το τμήμα  $AE$ . (Μονάδες 12)

Θέμα 34495

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και γωνία  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ . Θεωρούμε το ύψος του  $A\Delta$  και το μέσο  $Z$  της πλευράς  $A\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2}$ . (Μονάδες 12)

β) Προεκτείνουμε το ύψος  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) κατά ίσο τμήμα  $\Delta E$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Gamma E$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

Θέμα 34496

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα ύψη του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  που αντιστοιχούν στις πλευρές του  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB=A\Gamma$ , τότε τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Αν τα ύψη  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα, τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $A\Gamma=AB$ .

(Μονάδες 13)

Θέμα 34497

ΘΕΜΑ 2

Σε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  (προς το  $M$ ) κατά ίσο τμήμα  $M\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $ABM$  και  $M\Gamma\Delta$  είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) τα σημεία  $A$  και  $\Delta$  ισαπέχουν από την πλευρά  $B\Gamma$ . (Μονάδες 13)

Θέμα 34498

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και το ύψος του  $A\Delta$ . Προεκτείνουμε το  $A\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) κατά τμήμα  $\Delta E = A\Delta$ . Έστω  $K$  σημείο της  $B\Gamma$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = \Delta K$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $ABK$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο  $ABEK$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 13)

Θέμα 34499

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) και  $B\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B}$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε ευθεία κάθετη στη  $B\Gamma$  που την τέμνει σε σημείο  $E$  και έστω  $Z$  το σημείο στο οποίο η  $E\Delta$  τέμνει την προέκταση της πλευράς  $BA$  προς το  $A$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $AB=BE$ ,

(Μονάδες 13)

β) τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $ZEB$  είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

Θέμα 34500

## ΘΕΜΑ 2

Θωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και σημεία  $\Delta$  και  $E$  στην ευθεία  $B\Gamma$  τέτοια, ώστε  $B\Delta=GE$ . Έστω ότι  $\Delta Z \perp AB$  και  $E\text{H} \perp AG$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $BZ=GH$ ,

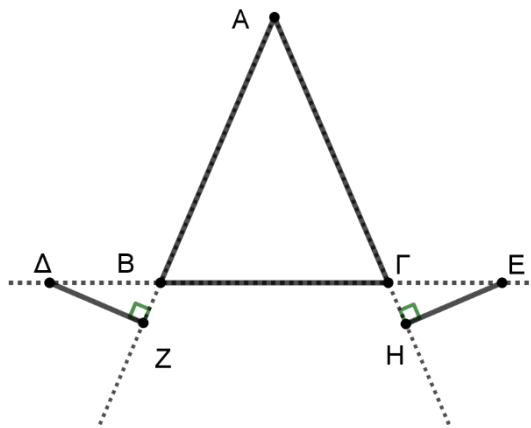
(Μονάδες 10)

ii. το τρίγωνο  $AZH$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 7)

β) Αν  $\hat{A} = 50^\circ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AZH$ .

(Μονάδες 8)



Θέμα 34502

## ΘΕΜΑ 2

Στο ακόλουθο σχήμα, η  $AD$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$  και το  $E$  είναι σημείο στην προέκταση της  $AD$ , ώστε  $DE=AD$ .

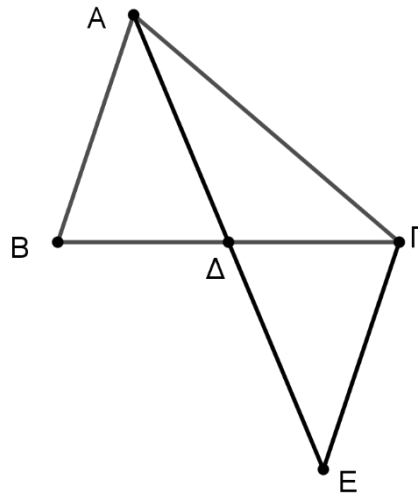
Να αποδείξετε ότι:

α)  $AB = \Gamma E$ ,

(Μονάδες 12)

β)  $AE < AB + A\Gamma$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 34503

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος της γωνίας του  $\widehat{\Gamma}$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $AB$  στο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στην πλευρά  $B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $A\Gamma\Delta$  και  $\Delta\Gamma E$  είναι ίσα, (Μονάδες 13)

β) Το  $\Gamma$  ισαπέχει από τα σημεία  $A$  και  $E$  και η ευθεία  $\Gamma\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $AE$ .

(Μονάδες 12)

Θέμα 34504

## ΘΕΜΑ 2

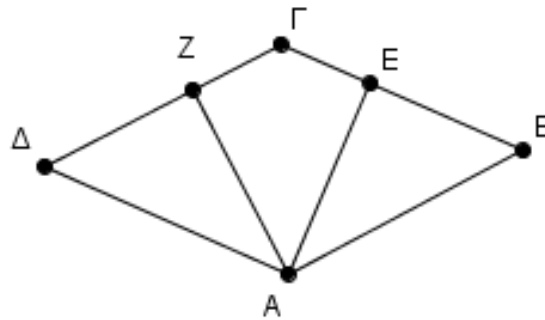
Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι παραλληλόγραμμο. Έστω ότι τα τμήματα  $AZ$  και  $AE$  είναι κάθετα στις πλευρές  $\Delta\Gamma$  και  $\Gamma B$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι ρόμβος, τότε  $AZ=AE$ . (Μονάδες 12)

β) Αν για το παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  ισχύει  $AZ=AE$ , τότε αυτό είναι ρόμβος.

(Μονάδες 13)



Θέμα 34505

## ΘΕΜΑ 2

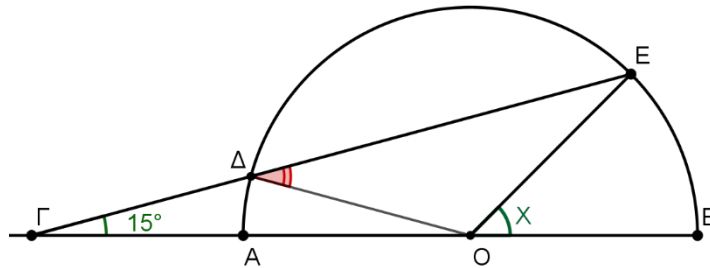
Σε ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  προεκτείνουμε την  $AB$  προς το μέρος του  $A$  και παίρνουμε ένα σημείο  $\Gamma$ . Θεωρούμε  $E$  ένα σημείο του ημικυκλίου και έστω  $\Delta$  το σημείο τομής του τμήματος  $\Gamma E$  με το ημικύκλιο. Αν το τμήμα  $\Gamma \Delta$  είναι ίσο με το  $OB$  και η γωνία  $B\hat{\Gamma}E$  είναι  $15^\circ$ , τότε

α) να αποδείξετε ότι  $O\hat{\Delta}E = 30^\circ$ .

(Μονάδες 13)

β) να υπολογίσετε τη γωνία  $E\hat{O}B = x$ .

(Μονάδες 12)



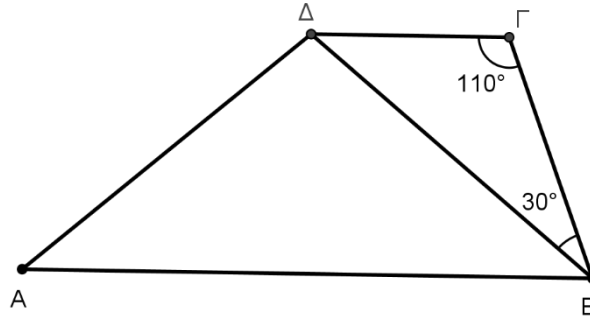
Θέμα 34506

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Delta\Gamma$ , στο οποίο η διαγώνιος  $B\Delta$  είναι ίση με την πλευρά  $A\Delta$ .

Αν είναι η γωνία  $\hat{\Gamma} = 110^\circ$  και η γωνία  $\Delta\hat{B}\Gamma = 30^\circ$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $A\hat{\Delta}B$ .

(Μονάδες 25)



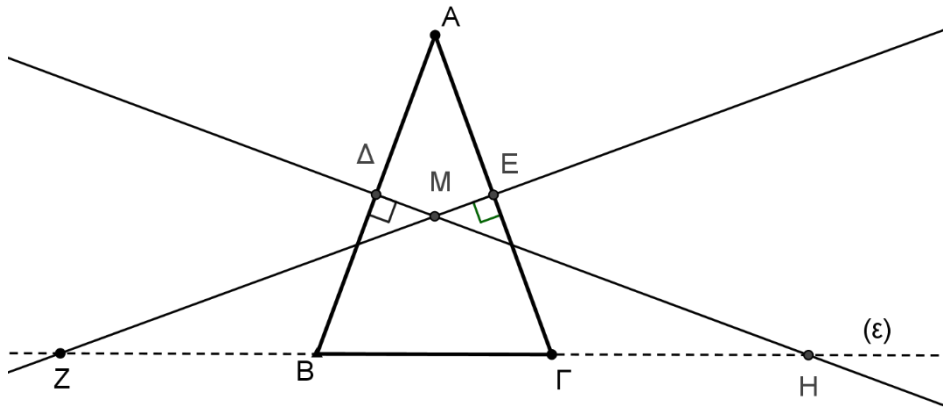
Θέμα 34507

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$  των πλευρών του  $AB$ ,  $AG$  αντίστοιχα. Έστω ότι οι μεσοκάθετες ευθείες των πλευρών  $AB$  και  $AG$  τέμνονται στο  $M$  και οι οποίες τέμνουν τον φορέα ( $\varepsilon$ ) της βάσης  $B\Gamma$  στα σημεία  $H$  και  $Z$ .

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $\Delta BH$  και  $EZ\Gamma$ . (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $MZH$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)



Θέμα 34509

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB//\Gamma\Delta$  και  $AB < \Gamma\Delta$ . Θεωρούμε τα σημεία  $E$  και  $Z$  πάνω στην  $AB$  έτσι ώστε  $AE = EZ = ZB$  και έστω  $K$  το σημείο τομής των  $\Delta Z$  και  $\Gamma E$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Delta Z = \Gamma E$ , (Μονάδες 13)

β) τα τρίγωνα  $EKZ$  και  $\Delta K\Gamma$  είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)

Θέμα 34511

ΘΕΜΑ 2

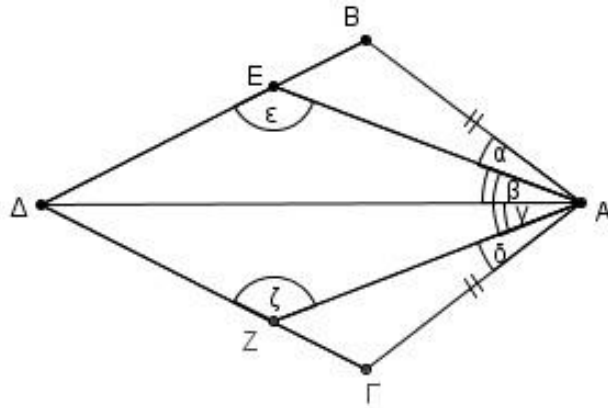
Αν στο παρακάτω σχήμα είναι  $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$ ,  $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$  και  $AB=AG$ , να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $AG\Delta$  είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) οι γωνίες  $\hat{\epsilon}$  και  $\hat{\zeta}$  είναι ίσες.

(Μονάδες 13)



Θέμα 34512

## ΘΕΜΑ 2

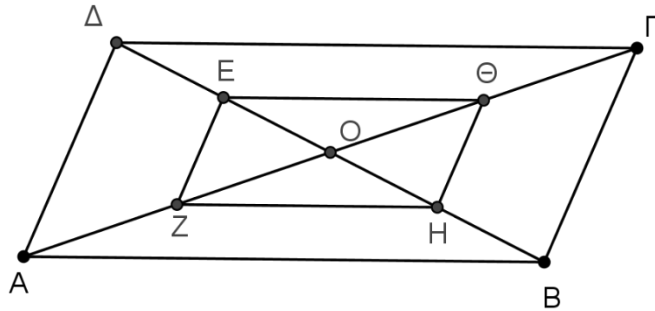
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ , του οποίου οι διαγώνιοι  $A\Gamma$  και  $\Delta B$  τέμνονται στο σημείο  $O$ .

Έστω  $E, Z, H$  και  $\Theta$  είναι τα μέσα των  $OD, OA, OB$  και  $OG$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τετράπλευρο  $EZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

β) Αν η περίμετρος του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  είναι 40, να βρείτε την περίμετρο του  $E\Theta HZ$ .

(Μονάδες 10)



Θέμα 34513

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου  $O$ , έστω  $OA$  μία ακτίνα του. Φέρουμε τη μεσοκάθετη της  $OA$  που τέμνει τον κύκλο στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $OBA$  είναι ισόπλευρο, (Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο  $OBA\Gamma$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 12)

Θέμα 34514

## ΘΕΜΑ 2

Έστω κυρτό τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  με  $ΒΑ = ΒΓ$  και  $\widehat{Α} = \widehat{Γ}$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{ΒΑΓ} = \widehat{ΒΓΑ}$ ,

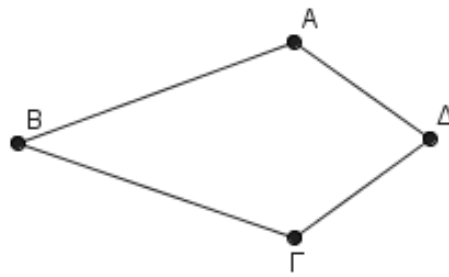
(Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο  $ΑΔΓ$  είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 10)

γ) η ευθεία  $ΒΔ$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $ΑΓ$ .

(Μονάδες 7)



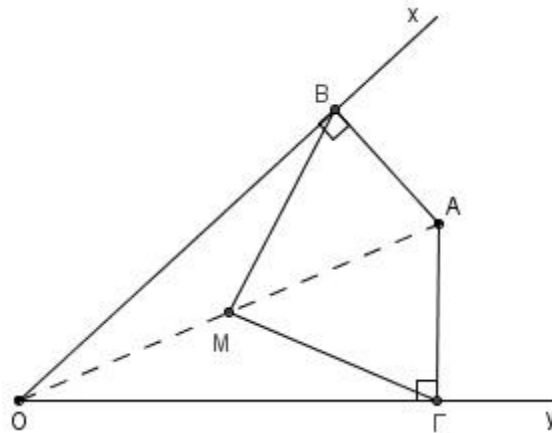
Θέμα 34515

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία  $\hat{xOy}$  και σημείο  $A$  στο εσωτερικό της. Από το  $A$  φέρνουμε τις κάθετες  $AB$ ,  $A\Gamma$  προς τις πλευρές  $Ox$ ,  $Oy$  της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε  $M$  το μέσο του  $OA$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο  $BMA$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 8)
- β) το τρίγωνο  $BM\Gamma$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 8)
- γ)  $\hat{BMA} = 2 \cdot \hat{xOA}$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 34516

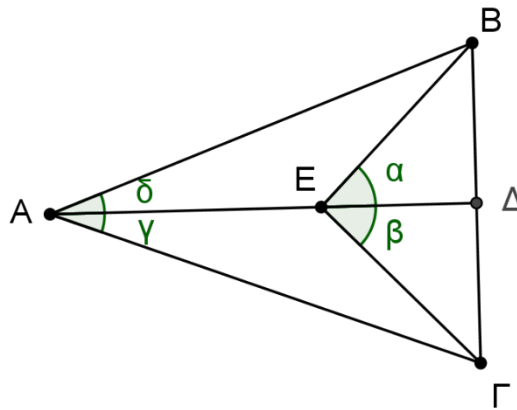
## ΘΕΜΑ 2

Αν για το ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) του σχήματος ισχύουν  $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$  και  $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ , να γράψετε μια απόδειξη για καθέναν από τους ακόλουθους ισχυρισμούς:

α) Τα τρίγωνα  $AEB$  και  $AEG$  είναι ίσα. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $ΓEB$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία  $A\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $B\Gamma$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 34768

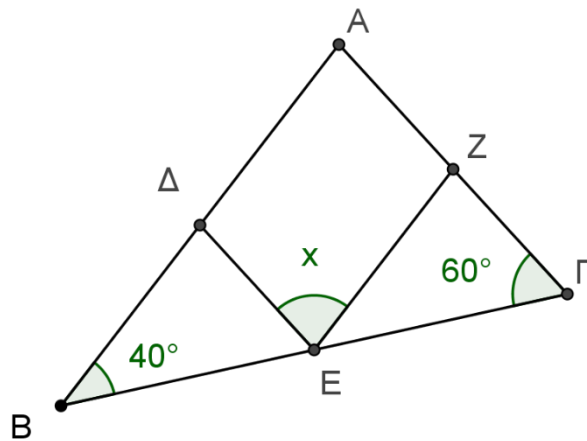
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{B} = 40^\circ$  και  $\widehat{\Gamma} = 60^\circ$ . Επιπλέον, τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $\Gamma A$  αντίστοιχα

α) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{A}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι  $\Delta E \parallel \Gamma A$  και  $Z E \parallel AB$ . (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta E$ . (Μονάδες 8)

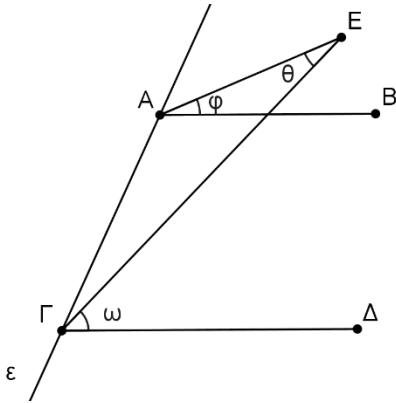


Θέμα 34770

ΘΕΜΑ 2

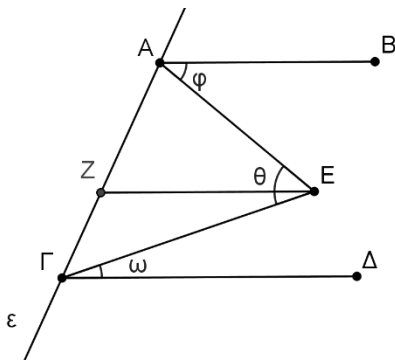
Δίνεται ευθεία  $\epsilon$  του επιπέδου. Τα παράλληλα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  καθώς και ένα τυχαίο σημείο  $E$  βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο της  $\epsilon$ .

α) Αν το  $E$  είναι εκτός των τμημάτων  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\hat{\omega} = \hat{\varphi} + \hat{\theta}$ .



(Μονάδες 10)

β) Αν το  $E$  είναι ανάμεσα στα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  και  $EZ \parallel AB$ , τότε να αποδείξετε ότι  $\hat{\theta} = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$ .



(Μονάδες 15)

Θέμα 34773

## ΘΕΜΑ 2

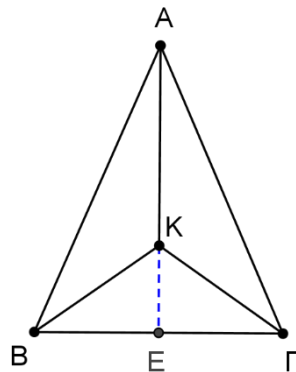
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $K$  εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε  $KB = K\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα  $BAK$  και  $KA\Gamma$  είναι ίσα, (Μονάδες 12)

ii. η  $AK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ . (Μονάδες 6)

β) Αν η προέκταση της  $AK$  τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $E$ , τότε να δείξετε ότι η  $KE$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $BK\Gamma$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 34774

## ΘΕΜΑ 2

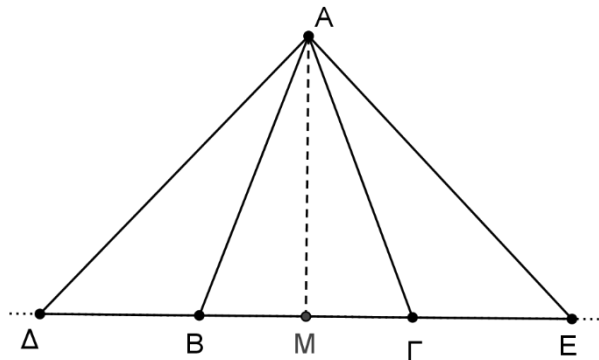
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και η διάμεσος του  $AM$ . Στην προέκταση της πλευράς  $B\Gamma$  και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα έτσι ώστε  $B\Delta = \Gamma E$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Gamma E}$ , (Μονάδες 6)

β) τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα, (Μονάδες 12)

γ) η  $AM$  είναι και διάμεσος του τριγώνου  $A\Delta E$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 34775

## ΘΕΜΑ 2

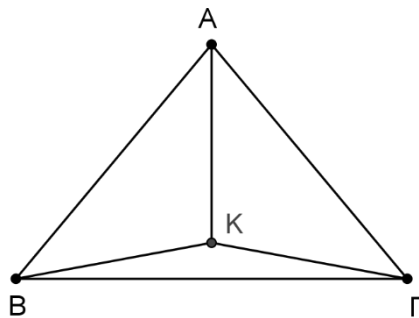
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$  και  $\hat{A} = 80^\circ$ . Έστω  $K$  σημείο της διχοτόμου της γωνίας  $\hat{A}$ , τέτοιο ώστε  $KB=KA=K\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $BKA$  και  $\Gamma KA$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε:

i. τις γωνίες  $\hat{ABK}$  και  $\hat{A\Gamma K}$ , (Μονάδες 8)

ii. τη γωνία  $\hat{BK\Gamma}$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 34776

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ). Έστω  $\Delta$  σημείο της πλευράς  $A\Gamma$  τέτοιο ώστε, η διχοτόμος  $DE$  της γωνίας  $A\widehat{\Delta}B$  να είναι παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\widehat{E\Delta B} = \widehat{\Delta B\Gamma}$  και  $\widehat{E\Delta A} = \widehat{\Gamma}$ ,

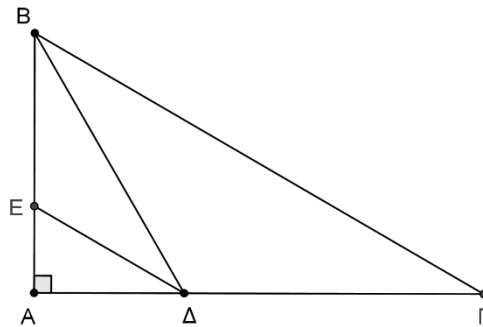
(Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

β) Αν είναι  $A\widehat{\Delta}B = 60^\circ$ , τότε να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{\Gamma}$ .

(Μονάδες 9)



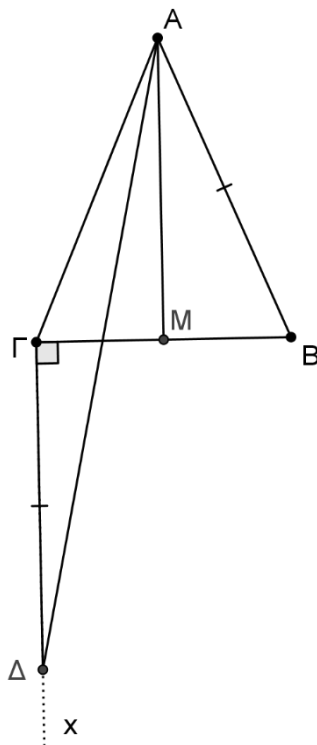
Θέμα 34777

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και το ύψος του  $AM$ . Φέρουμε ημιευθεία  $\Gamma\chi$  κάθετη στη  $B\Gamma$ , προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το  $A$ , και παίρνουμε σε αυτήν τμήμα  $\Gamma\Delta = AB$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) η γωνία  $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma}$  είναι ίση με τη γωνία  $\widehat{\Gamma\hat{A}A}$ , (Μονάδες 12)
- β)  $\Gamma\Delta \parallel AM$ , (Μονάδες 6)
- γ) η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $M\hat{A}\Gamma$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 34778

## ΘΕΜΑ 2

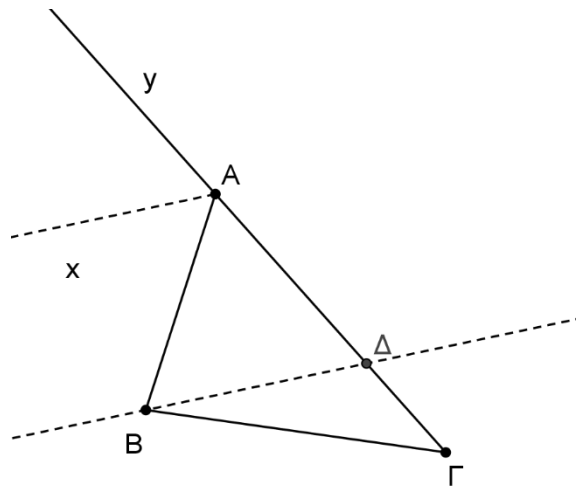
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Έστω  $Ax$  η διχοτόμος της εξωτερικής του γωνίας  $\widehat{A}_{\varepsilon\varepsilon}$ , όπου  $\widehat{A}_{\varepsilon\varepsilon} = 120^\circ$ . Από την κορυφή  $B$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην  $Ax$ , η οποία τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\Delta\widehat{B}A = 60^\circ$ , (Μονάδες 9)

ii. το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισόπλευρο, (Μονάδες 9)

β) Αν η γωνία  $B\widehat{\Delta}A$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\widehat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta\Gamma$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 34779

ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ (προς το Α) και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα  $ΑΔ=ΑΒ$  και  $ΑΕ=ΑΓ$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β)  $ΕΔ//ΒΓ$ .

(Μονάδες 13)

Θέμα 34780

## ΘΕΜΑ 2

Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ και ΓΑ (προς το Α) τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα τμήματα  $ΑΔ = ΑΒ$  και  $ΑΕ = ΑΓ$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $ΔΕ = ΒΓ$ . (Μονάδες 12)

β) Αν ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΕΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΒΜ είναι ίσα, (Μονάδες 7)

ii.  $ΖΔ = \frac{ΔΕ}{2}$ . (Μονάδες 6)

Θέμα 34781

ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε τα μέσα Μ και Ν των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $ΜΔ=ΜΓ$ , (Μονάδες 12)

β) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Μ και Ν είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ.  
(Μονάδες 13)

Θέμα 34783

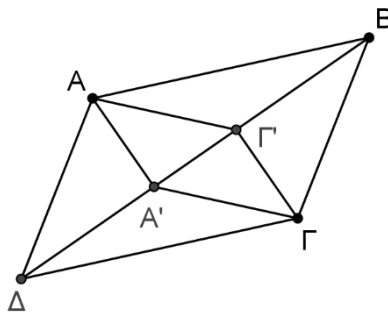
## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και τμήματα  $AA'$ ,  $\Gamma\Gamma'$  κάθετα στη διαγώνιο  $B\Delta$  από τις κορυφές  $A$ ,  $\Gamma$  αντίστοιχα. Αν τα σημεία  $A'$  και  $\Gamma'$  δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι:

α)  $AA' \parallel \Gamma\Gamma'$ , (Μονάδες 8)

β)  $AA' = \Gamma\Gamma'$ , (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο  $A\Gamma'\Gamma A'$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



Θέμα 34784

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και σημείο  $M$  εσωτερικό του τριγώνου τέτοιο ώστε  $MB = M\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $AMB$  και  $AM\Gamma$  είναι ίσα (Μονάδες 12)

β) η ευθεία  $AM$  διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{B\Gamma}$ . (Μονάδες 13)

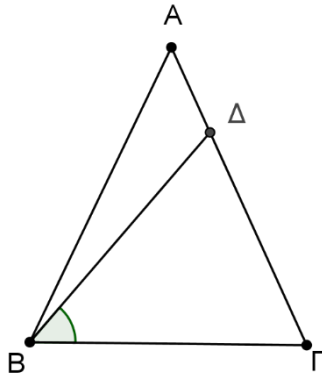
Θέμα 34785

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ισοσκελές  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ) με γωνία  $\hat{A} = 50^\circ$ . Έστω  $\Delta$  είναι σημείο της πλευράς  $A\Gamma$ , τέτοιο ώστε  $B\Delta=B\Gamma$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $\Delta\hat{B}\Gamma$  είναι ίση με τη γωνία  $\hat{A}$ . (Μονάδες 13)



Θέμα 34786

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{\Gamma} = 40^\circ$ . Έστω  $\Delta$  τυχαίο σημείο της πλευράς  $A\Gamma$  και  $\Delta E \perp B\Gamma$ .

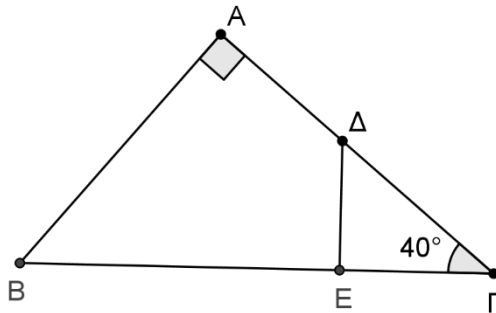
Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ ,

(Μονάδες 10)

β) τις γωνίες του τετραπλεύρου  $A\Delta E B$ .

(Μονάδες 15)



Θέμα 34787

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) με γωνία κορυφής  $\hat{A} = 40^\circ$ . Στην προέκταση της  $\Gamma B$  (προς το  $B$ ) παίρνουμε τμήμα  $B\Delta$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = AB$ .

Να υπολογίσετε:

α) τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ , (Μονάδες 10)

β) τη γωνία  $\Delta\hat{A}\Gamma$ . (Μονάδες 15)

Θέμα 36086

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) με γωνία  $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$  και το μέσο  $M$  της πλευράς του  $B\Gamma$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AM\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{AM\Gamma}$ . (Μονάδες 9)

Θέμα 36087

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα ισχύουν  $\Delta B=BA=A\Gamma=GE$  και  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 40^\circ$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{A\hat{\Gamma}E} = 110^\circ$ ,

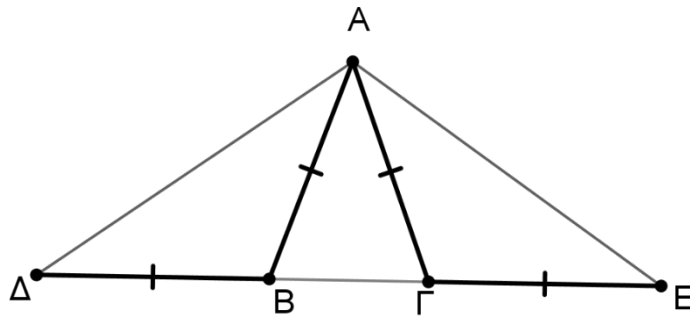
(Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα,

(Μονάδες 10)

γ) το τρίγωνο  $\Delta AE$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)



Θέμα 36088

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 40^\circ$  και  $\hat{B} = 70^\circ$ . Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $A\Gamma$  με  $\Delta E = 9$  και  $E\Gamma = 16$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές και να βρείτε ποιες είναι οι ίσες πλευρές του,

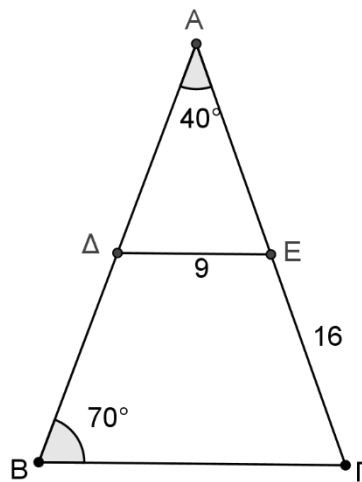
(Μονάδες 8)

ii.  $B\Gamma = 18$ .

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 9)



Θέμα 36089

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών  $\hat{A}$  και  $\hat{B}$  τέμνουν τις πλευρές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $AE\Delta$  και  $B\Gamma Z$  είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο  $\Delta EBZ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

Θέμα 36090

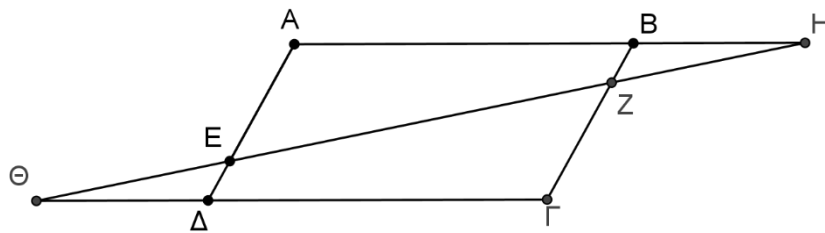
ΘΕΜΑ 2

Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια ώστε  $AE = GZ$ . Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι:

α)  $\widehat{HBZ} = \widehat{E\Delta\Theta}$ , (Μονάδες 8)

β)  $\widehat{BZH} = \widehat{\Delta\hat{E}\Theta}$ , (Μονάδες 8)

γ)  $BH = \Theta\Delta$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 36091

## ΘΕΜΑ 2

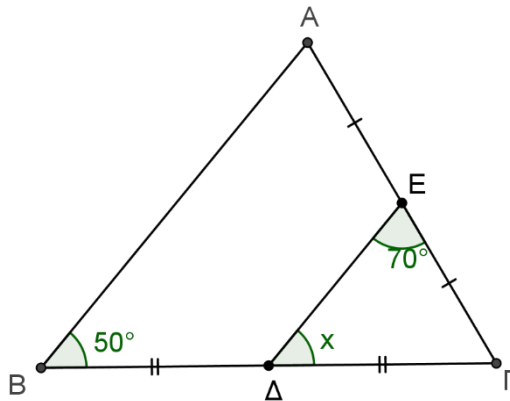
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{B} = 50^\circ$ . Έστω ότι τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $\Delta\widehat{E}\Gamma = 70^\circ$ .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί  $DE \parallel AB$ . (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε:

i. τη γωνία  $\hat{x}$ , (Μονάδες 8)

ii. τις γωνίες  $\widehat{A}$  και  $\widehat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 36092

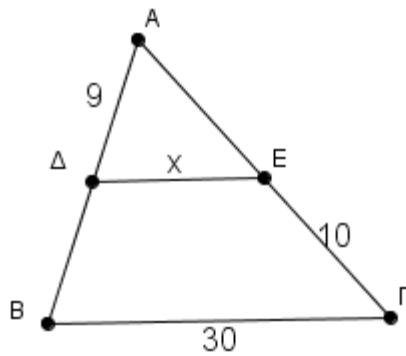
ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\Delta$  και  $E$  τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα,  $A\Delta=9$ ,  $E\Gamma=10$  και  $B\Gamma=30$ .

α) Να υπολογίσετε:

- i. το μήκος  $x$  του τμήματος  $\Delta E$ , (Μονάδες 8)
- ii. την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta E\Gamma B$  είναι τραπέζιο. (Μονάδες 8)



Θέμα 36093

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

Επιπλέον ισχύουν  $A\Delta = E\Delta = \Delta B$  με  $AE=8$  και  $\Delta B=10$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. το τρίγωνο  $AEB$  είναι ορθογώνιο,

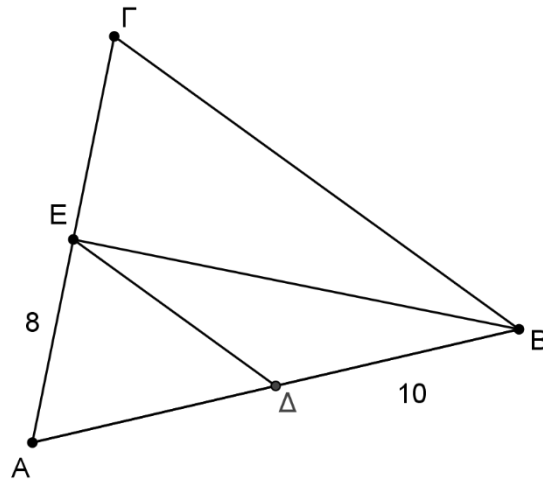
(Μονάδες 8)

ii.  $B\Gamma=20$ .

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 9)



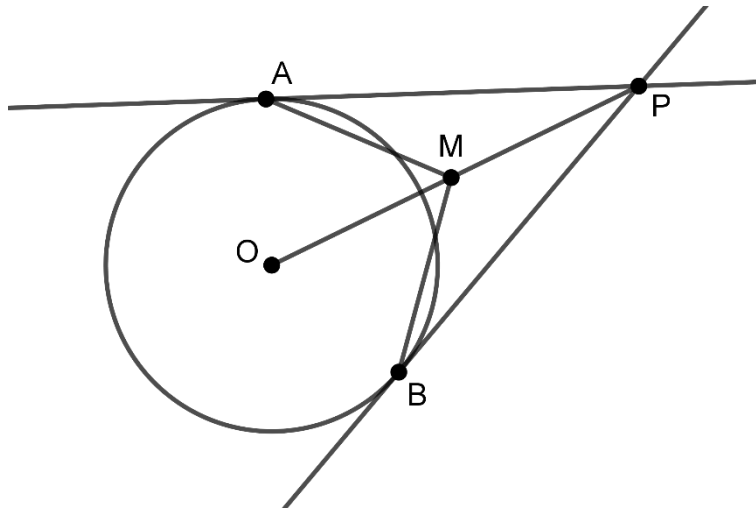
Θέμα 36095

## ΘΕΜΑ 2

Από εξωτερικό σημείο  $P$  ενός κύκλου  $(O, \rho)$  φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $PA$  και  $PB$ . Αν  $M$  είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος  $OP$ , να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $PAM$  και  $PMB$  είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) οι γωνίες  $\widehat{MAO}$  και  $\widehat{MBO}$  είναι ίσες. (Μονάδες 13)



Θέμα 36096

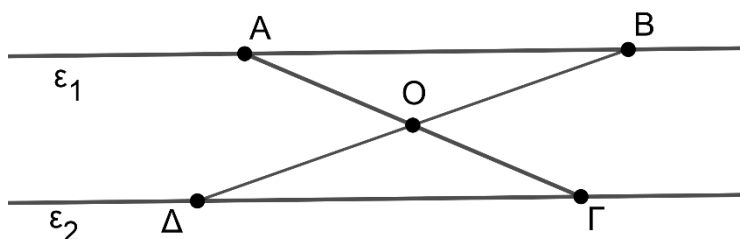
## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και τα σημεία Α, Β στην  $\varepsilon_1$  και Δ και Γ στην  $\varepsilon_2$  ώστε τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται στο μέσο Ο του ΒΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

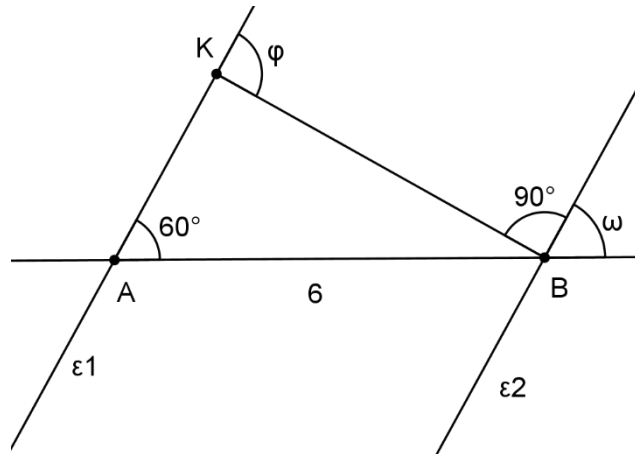


Θέμα 36097

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι παράλληλες και  $AB=6$ .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{\varphi}$  και  $\hat{\omega}$ . (Μονάδες 10)
- β) Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου  $ABK$  ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 7)
- γ) Να υπολογίσετε το μήκος της  $AK$ , αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



Θέμα 36098

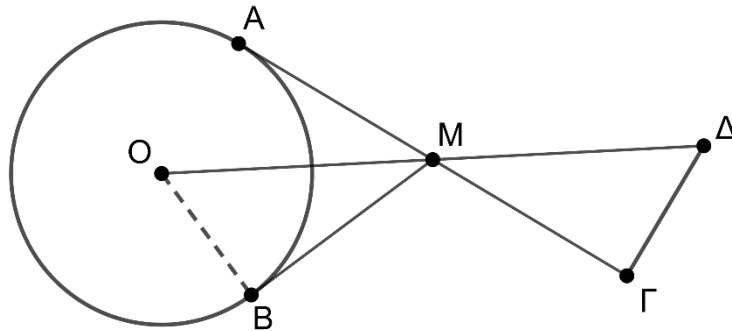
## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος  $(O,R)$  και τα εφαπτόμενα τμήματα  $MA$  και  $MB$ .

Προεκτείνουμε την  $AM$  κατά τμήμα  $M\Gamma=MA$  και την  $OM$  κατά τμήμα  $M\Delta=OM$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $MB = M\Gamma$ . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $OMB$  και  $M\Gamma\Delta$  είναι ίσα. (Μονάδες 15)



Θέμα 36099

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και στις ίσες πλευρές  $AB,AG$  παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα  $AD=\frac{1}{3}AB$  και  $AE=\frac{1}{3}AG$ . Αν  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

- α) τα τμήματα  $BD$  και  $GE$  είναι ίσα, (Μονάδες 5)
- β) τα τρίγωνα  $BDM$  και  $ME\Gamma$  είναι ίσα, (Μονάδες 10)
- γ) το τρίγωνο  $DEM$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

Θέμα 36100

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $KAB$  ( $KA=KB$ ) και  $K\Gamma$  διχοτόμος της γωνίας  $\widehat{K}$ . Στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) παίρνουμε σημείο  $\Lambda$  και στην προέκταση της  $AB$  (προς το  $B$ ) παίρνουμε σημείο  $M$ , έτσι ώστε  $A\Lambda=BM$ . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $K\Lambda M$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 12)

β) η  $K\Gamma$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $K\Lambda M$ . (Μονάδες 13)

Θέμα 36101

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 80^\circ$  και  $\hat{B} = 20^\circ + \hat{\Gamma}$ , και  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$ . (Μονάδες 12)

β) Φέρουμε από το  $\Delta$  ευθεία παράλληλη στην  $AB$ , που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ . Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{A\Delta E}$  και  $\hat{E\Delta\Gamma}$ . (Μονάδες 13)

Θέμα 36102

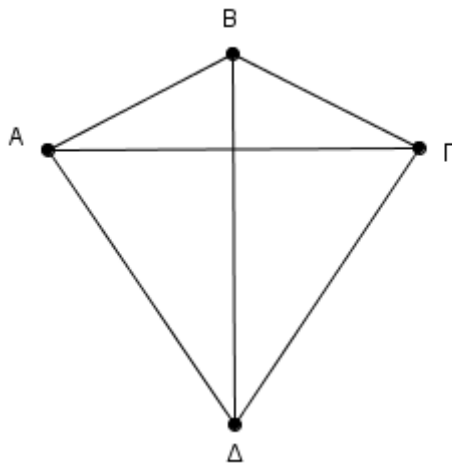
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $BA=B\Gamma$  και  $\Delta A=\Delta\Gamma$ . Οι διαγώνιοι  $A\Gamma$ ,  $B\Delta$  του τετραπλεύρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

Να αποδείξετε ότι:

α) η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος των γωνιών  $B$  και  $\Delta$  του τετραπλεύρου  $AB\Gamma\Delta$ , (Μονάδες 12)

β) η  $B\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $A\Gamma$ . (Μονάδες 13)



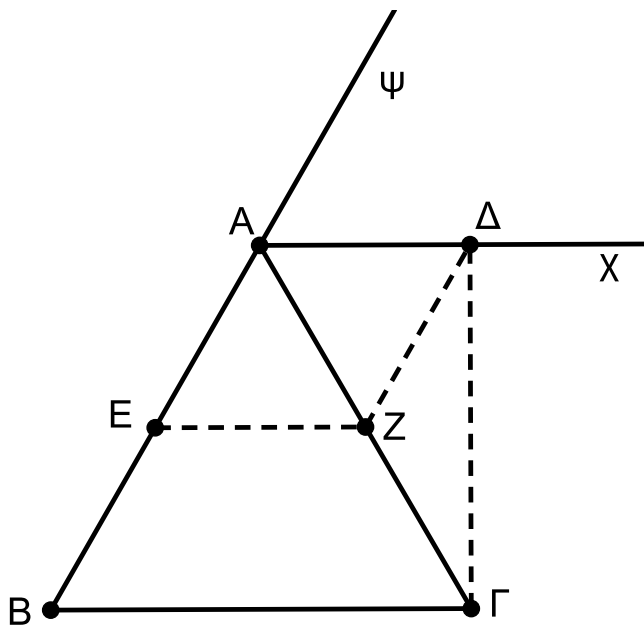
Θέμα 36103

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο  $A\chi$  της γωνίας  $\hat{A}$  και από το σημείο  $\Gamma$  την κάθετο  $\Gamma\Delta$  στην  $A\chi$ . Τα σημεία  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $EZ = AE = AZ$ , (Μονάδες 9)
- β) η γωνία  $A\hat{\Gamma}\Delta$  είναι ίση με  $30^\circ$ , (Μονάδες 10)
- γ) το τετράπλευρο  $A\Delta ZE$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)



Θέμα 36104

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία  $\widehat{XOY}$  και η διχοτόμος της  $OX$ . Θεωρούμε σημείο  $M$  της  $OY$  και σημεία  $A$  και  $B$  στις ημιευθείες  $Ox$  και  $Oy$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $OA=OB$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $MA=MB$ ,

(Μονάδες 15)

β) Η  $OY$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A\widehat{M}B$ .

(Μονάδες 10)

Θέμα 36105

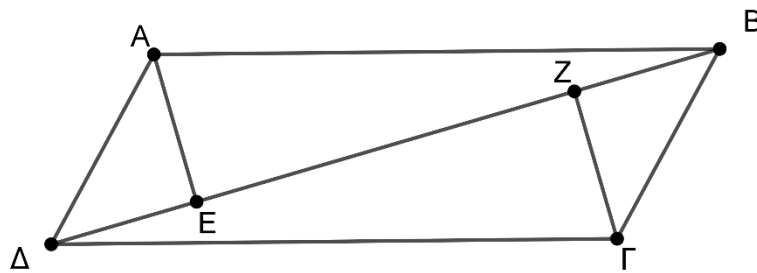
## ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB > B\Gamma$  φέρουμε από τις κορυφές  $A$  και  $\Gamma$  καθέτους στη διαγώνιο  $B\Delta$ , οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $AE = \Gamma Z$ , (Μονάδες 15)

β) το τετράπλευρο  $A\epsilon\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



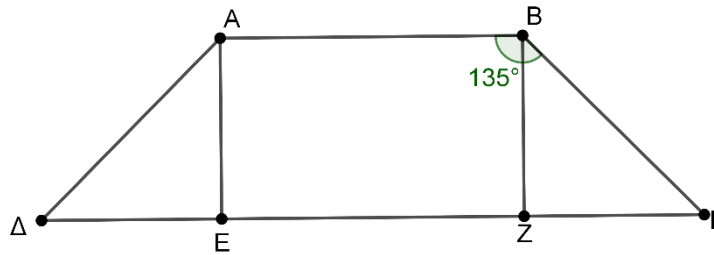
Θέμα 36106

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ) με  $ΓΔ > ΑΒ$  και  $\widehat{Β} = 135^\circ$ . Από τις κορυφές  $Α$  και  $Β$  φέρουμε τα ύψη του  $ΑΕ$  και  $ΒΖ$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι  $ΑΕ = ΕΔ = ΒΖ = ΖΓ$ . (Μονάδες 15)



Θέμα 36107

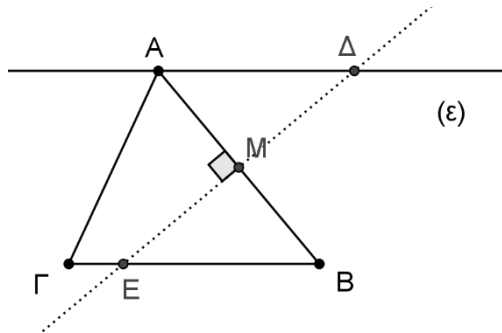
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΓΒ. Φέρουμε από τη κορυφή Α ευθεία (ε) παράλληλη στη ΒΓ. Η κάθετη στο μέσο Μ της πλευράς ΑΒ τέμνει την (ε) στο Δ και την ΒΓ στο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι  $ΔΑ=ΔΒ$  και  $ΕΑ=ΕΒ$ . (Μονάδες 6)

β) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΕΜΒ. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)



Θέμα 36109

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$  και  $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

(Μονάδες 15)

β) Αν η πλευρά ΒΓ=2cm να βρείτε το μήκος της ΑΒ.

(Μονάδες 10)

Θέμα 36110

ΘΕΜΑ 2

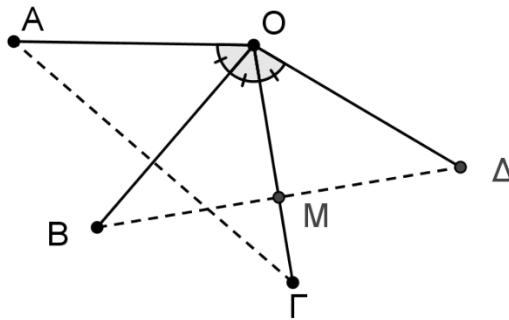
Αν στο σχήμα που ακολουθεί είναι  $\widehat{AOB} = \widehat{BOG} = \widehat{GOD}$  και  $OA = OB = OG = OD$ , τότε να αποδείξετε ότι:

α)  $AG = BD$ ,

(Μονάδες 10)

β) το  $M$  είναι μέσον της  $BD$ , όπου  $M$  το σημείο τομής των τμημάτων  $OG$  και  $BD$ .

(Μονάδες 15)



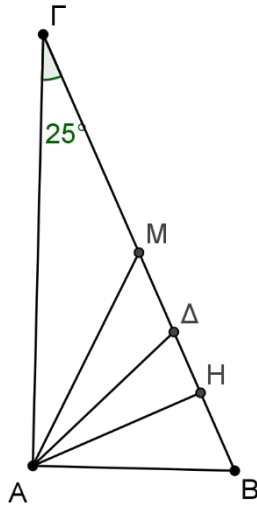
Θέμα 36111

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 25^\circ$ . Δίνονται επίσης η διάμεσος  $AM$ , το ύψος  $AH$  από την κορυφή  $A$  και η διχοτόμος  $AD$  της γωνίας  $\hat{A}$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{A}MB$ ,  $\hat{H}AB$ ,  $\hat{A}DB$ . (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι  $\hat{M}AD = \hat{D}AH = 20^\circ$ . (Μονάδες 10)



Θέμα 36112

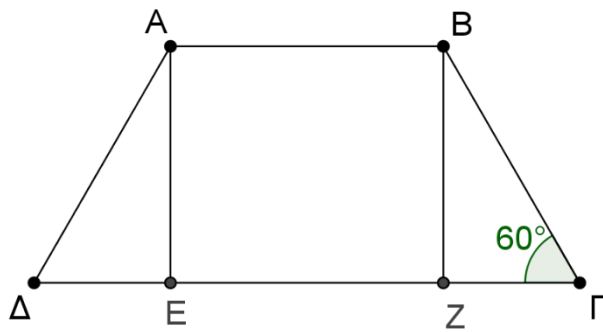
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ//ΓΔ$ ), με  $ΑΒ=6$ ,  $ΒΓ=4$  και  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ . Δίνονται επίσης τα ύψη  $ΑΕ$  και  $ΒΖ$  από τις κορυφές  $Α$  και  $Β$  αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραpezίου  $ΑΒΓΔ$ . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα  $ΑΕΔ$ ,  $ΒΖΓ$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του  $ΑΒΓΔ$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 36113

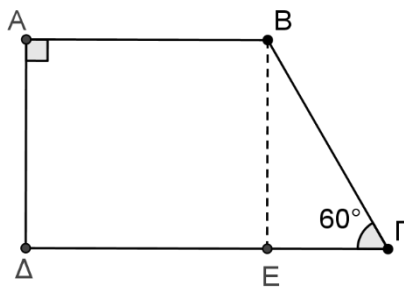
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ), με  $AB=B\Gamma=4$ ,  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ . Φέρουμε το ύψος  $BE$  από τη κορυφή  $B$ .

α) Να υπολογίσετε τις άλλες δυο γωνίες του τραpezίου  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι  $2E\Gamma=B\Gamma$ . (Μονάδες 9)

γ) Αν  $M, N$  τα μέσα των πλευρών  $AD, B\Gamma$  αντίστοιχα να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος  $MN$ . (Μονάδες 8)



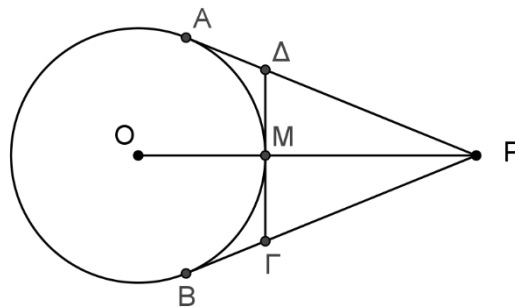
Θέμα 36114

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και ένα εξωτερικό του σημείο  $P$ , από το οποίο φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου  $PA$  και  $PB$ . Έστω ότι το τμήμα  $PO$  τέμνει τον κύκλο στο σημείο  $M$  και η εφαπτομένη του κύκλου στο  $M$  τέμνει τα  $PA$  και  $PB$  στα σημεία  $\Delta$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $P\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία  $\widehat{APB}$  είναι  $40^\circ$  να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{AOB}$ . (Μονάδες 12)



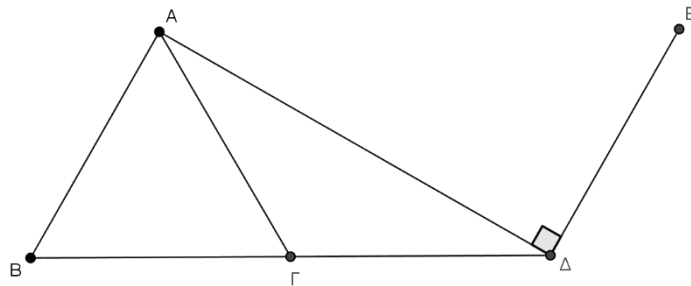
Θέμα 36115

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το μέρος του  $\Gamma$ ) θεωρούμε τμήμα  $\Gamma\Delta=B\Gamma$ . Φέρουμε τμήμα  $\Delta E$  κάθετο στην  $AD$  στο σημείο της  $\Delta$ , τέτοιο ώστε  $\Delta E=B\Gamma$  (τα  $A$  και  $E$  είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την  $B\Delta$ ).

α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Delta$ . (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το  $AB\Delta E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



Θέμα 36116

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  (με  $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma}$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ , τέτοιο ώστε  $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{cm}$ .

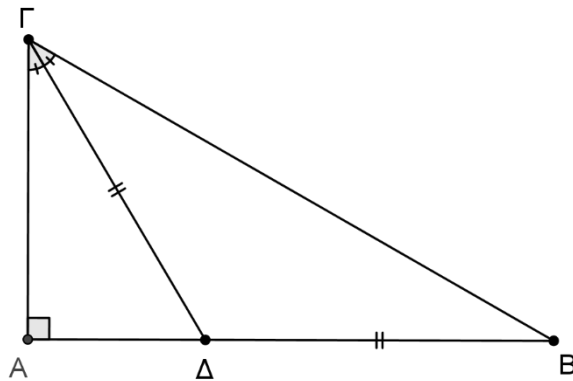
Να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{B} = 30^\circ$ .

(Μονάδες 12)

β)  $AB = 3\text{cm}$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 36117

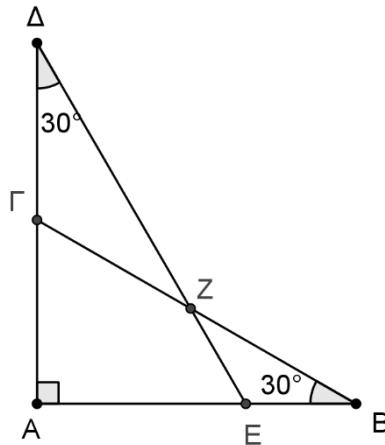
## ΘΕΜΑ 2

Στα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$  (γωνία  $A$  ορθή) του παρακάτω σχήματος ισχύει

$\hat{B} = \hat{\Delta} = 30^\circ$  και  $Z$  το σημείο τομής των πλευρών τους  $B\Gamma$  και  $\Delta E$  αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $AEZ\Gamma$ . (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Gamma Z\Delta$  και  $EBZ$  είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)



Θέμα 36118

## ΘΕΜΑ 2

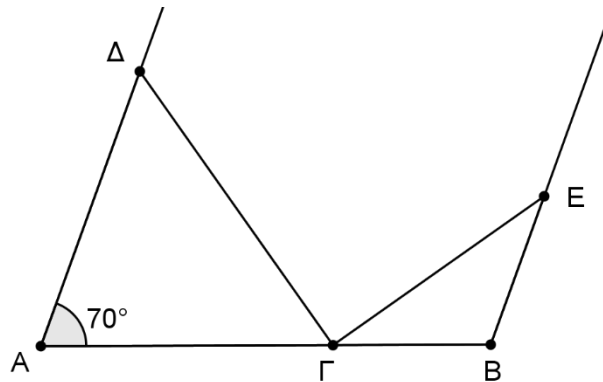
Στο παρακάτω σχήμα, οι  $AD$  και  $BE$  είναι παράλληλες. Επιπλέον ισχύουν  $AD=AG$ ,  $BE=BG$  και  $\hat{A} = 70^\circ$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων  $ADG$  και  $BGE$ .

(Μονάδες 16)

β) Να αποδείξετε ότι  $\hat{\Delta GE} = 90^\circ$ .

(Μονάδες 9)



Θέμα 36163

ΘΕΜΑ 2

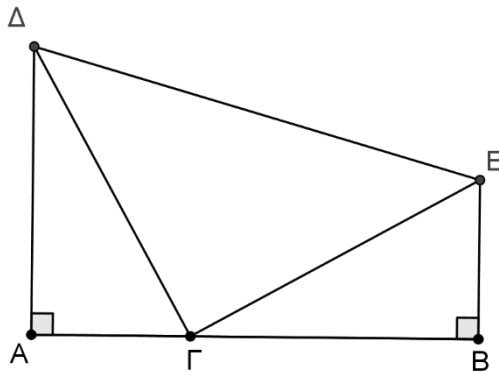
Στο παρακάτω σχήμα οι γωνίες  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  είναι ορθές και επιπλέον  $AD=BG$  και  $AG=BE$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα  $AG\Delta$  και  $BGE$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν η γωνία  $\hat{EGB} = 40^\circ$ , τότε το τρίγωνο  $\Delta GE$  είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(Μονάδες 12)



Θέμα 36164

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  στο οποίο ισχύει  $B\Gamma=2AB$  και έστω  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Αν η  $A\Delta$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $ABM$  και  $E$  σημείο στην προέκτασή της ώστε  $A\Delta=\Delta E$ .

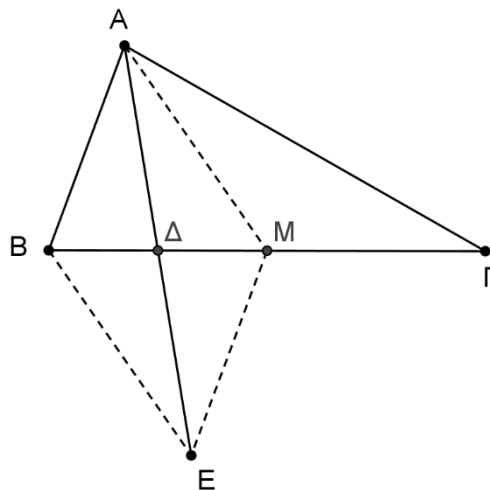
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο  $ABEM$  είναι παραλληλόγραμμο,

(Μονάδες 12)

β)  $ME=M\Gamma$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 36165

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τετράγωνο  $ΑΒΓΔ$  και σημεία  $Ε$  και  $Ζ$  στις προεκτάσεις των  $ΑΒ$  (προς το  $Β$ ) και  $ΒΓ$  (προς το  $Γ$ ) αντίστοιχα, ώστε  $ΒΕ=ΓΖ$ .

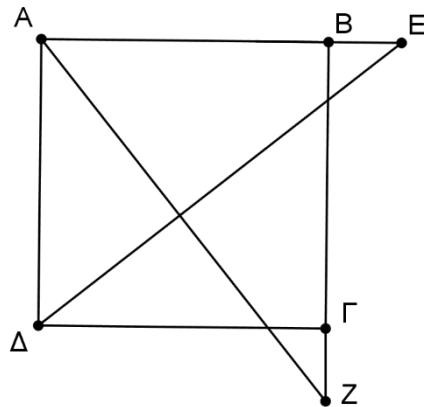
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $ΑΒΖ$  και  $ΑΕΔ$  είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) οι γωνίες  $Ε\hat{Δ}Γ$  και  $Α\hat{Ζ}Β$  είναι ίσες.

(Μονάδες 13)



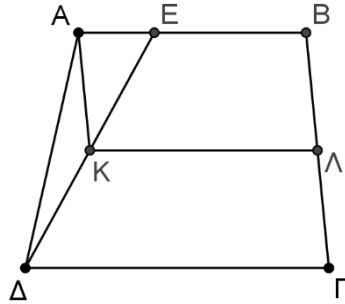
Θέμα 36166

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB=3$ ,  $\Gamma\Delta=4$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην  $AB$  ώστε  $AE=1$ . Στο τραπέζιο  $EB\Gamma\Delta$  θεωρούμε τα  $K$  και  $\Lambda$ , μέσα των  $E\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα

α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο  $K\Lambda$  του τραpezίου  $EB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Lambda K$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)



Θέμα 36167

## ΘΕΜΑ 2

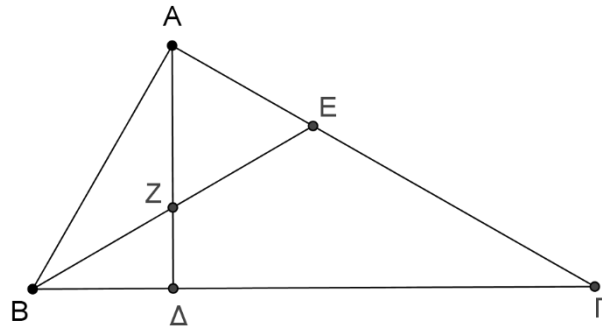
Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύουν  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\hat{B}$  και  $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$ .

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία  $B$  είναι  $60^\circ$ .

(Μονάδες 10)

β) Αν το ύψος του  $A\Delta$  και η διχοτόμος του  $BE$  τέμνονται στο σημείο  $Z$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 15)



Θέμα 36168

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία  $\hat{A}$  και η γωνία  $\hat{\Gamma}$  είναι μικρότερη της γωνίας  $\hat{B}$ . Η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  και η  $\Delta E$  είναι κάθετη στην  $B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $A\Delta = \Delta E$ ,

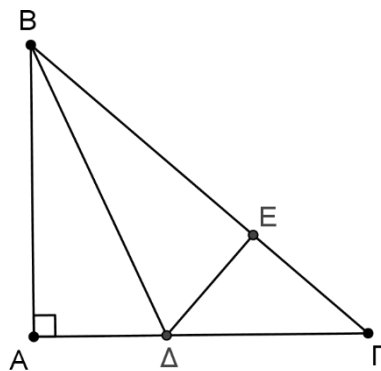
(Μονάδες 8)

β)  $A\Delta < \Delta\Gamma$ ,

(Μονάδες 9)

γ)  $A\Gamma > AB$ .

(Μονάδες 8)



Θέμα 36169

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 35^\circ$  και Μ το μέσο της ΒΓ.

- α) Να υπολογίσετε τη γωνία Γ. (Μονάδες 10)
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΜΒ. (Μονάδες 15)

Θέμα 36170

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $BA$  και  $\Gamma A$  (προς το Α) θεωρούμε τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  αντίστοιχα τέτοια ώστε  $AE = A\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $BE = \Gamma\Delta$ , (Μονάδες 6)

β)  $B\Delta = \Gamma E$ , (Μονάδες 10)

γ)  $\widehat{\Delta B\Gamma} = \widehat{E\Gamma B}$ . (Μονάδες 9)

Θέμα 36171

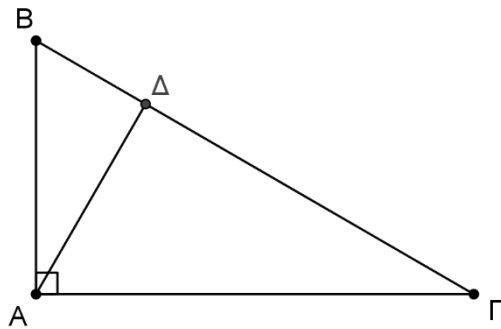
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή,  $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$  και το ύψος του  $A\Delta$ .

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)

β) Να υπολογιστεί η γωνία  $B\hat{A}\Delta$ . (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \frac{AB}{2}$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 36172

## ΘΕΜΑ 2

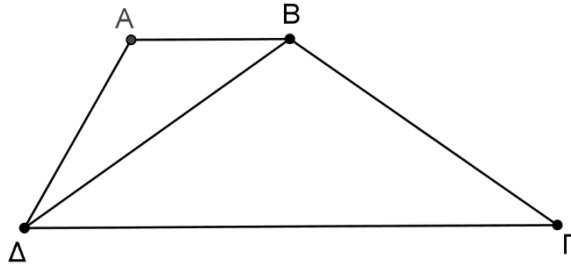
Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $B\Delta = B\Gamma$ . Αν  $\widehat{\Delta B \Gamma} = 110^\circ$  και  $\widehat{A \Delta B} = 25^\circ$  να υπολογίσετε:

α) τη γωνία  $\widehat{\Gamma}$ ,

(Μονάδες 11)

β) τη γωνία  $\widehat{A}$ .

(Μονάδες 14)



Θέμα 36173

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο  $B\Gamma\Delta E$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες :

i.  $\widehat{ABE}$

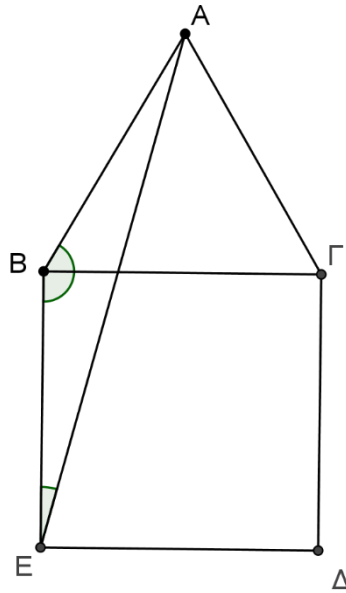
(Μονάδες 8)

ii.  $\widehat{BEA}$

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AE\Delta$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)



Θέμα 36174

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο  $AB\Delta E$ .

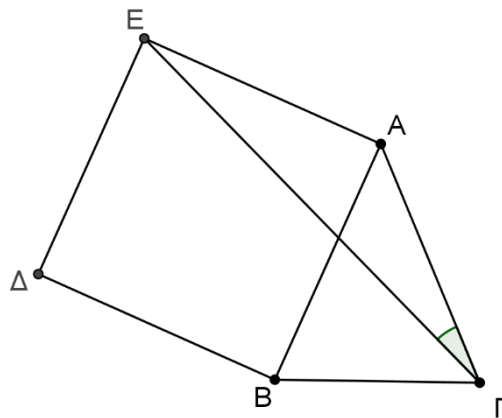
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $A\Gamma E$  είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 10)

β)  $2 \cdot \hat{E}\Gamma A = 90^\circ - \hat{B}\hat{A}\Gamma$ .

(Μονάδες 15)



Θέμα 36175

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο και το  $A\Gamma\Delta E$  είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο  $A$  είναι μέσο του  $BE$ ,

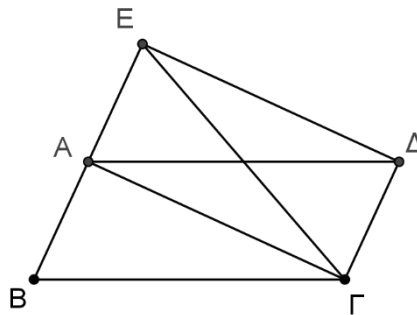
(Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο  $BE\Gamma$  είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 9)

γ)  $\hat{B}\Gamma A = \hat{A}\Delta E$ .

(Μονάδες 8)



Θέμα 36224

## ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και γωνία  $\widehat{B}$  ίση με  $30^\circ$ . Θεωρούμε  $\Delta$  και  $E$  τα μέσα των  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

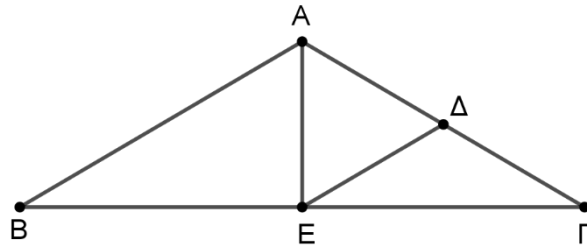
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $E\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του.

(Μονάδες 16)

β) το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 9)



Θέμα 36225

## ΘΕΜΑ 2

Έστω παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $ΒΑ$  (προς το  $Α$ ) και την πλευρά  $ΔΓ$  (προς το  $Γ$ ) κατά τμήματα  $ΑΕ = ΑΒ$  και  $ΓΖ = ΔΓ$ .

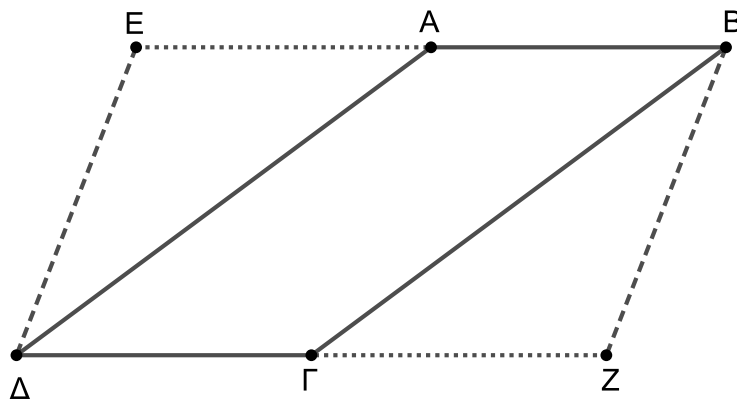
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $ΑΔΕ$  και  $ΒΓΖ$  είναι ίσα,

(Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο  $ΕΒΖΔ$  είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)



Θέμα 36226

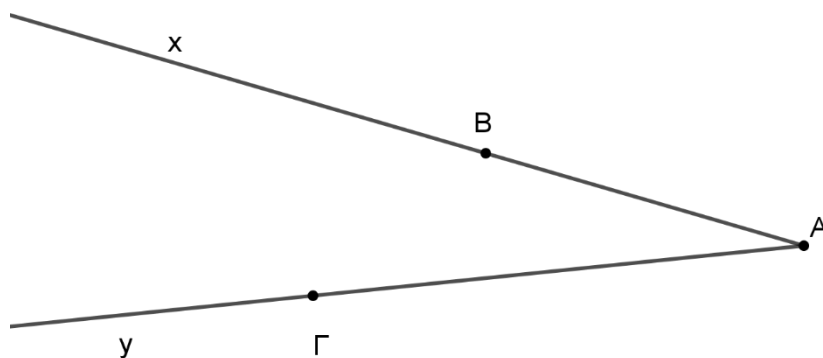
## ΘΕΜΑ 3

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε το χάρτη μίας περιοχής όπου είναι κρυμμένος ένας θησαυρός. Οι ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  παριστάνουν δύο ποτάμια και στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  βρίσκονται δύο πλατάνια. Ο πλάτανος που βρίσκεται στο σημείο  $B$  έχει μικρότερη απόσταση από το σημείο  $A$ , σε σχέση με την απόσταση που έχει από το σημείο  $A$  ο πλάτανος που βρίσκεται στο σημείο  $\Gamma$ .

Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τις δυνατές θέσεις του θησαυρού, αν είναι γνωστό ότι:

- α) ο θησαυρός ισαπέχει από τα δύο πλατάνια. (Μονάδες 9)
- β) ο θησαυρός ισαπέχει από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 9)
- γ) ο θησαυρός ισαπέχει από τα δύο πλατάνια και ισαπέχει και από τα δύο ποτάμια. (Μονάδες 7)

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας σε κάθε περίπτωση.



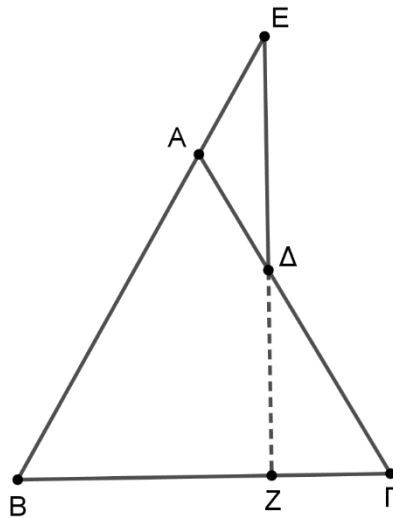
Θέμα 36228

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) και σημείο  $\Delta$  στο εσωτερικό της πλευράς  $A\Gamma$ , ώστε  $AE = A\Delta$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $A\Delta E$ . (Μονάδες 10)

β) Αν  $Z$  είναι το σημείο τομής της προέκτασης της  $E\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) με την  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι η  $EZ$  είναι κάθετη στην  $B\Gamma$ . (Μονάδες 15)



Θέμα 36327

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα παραλληλόγραμμα  $ΑΒΔΓ$  και  $ΒΔΕΖ$ .

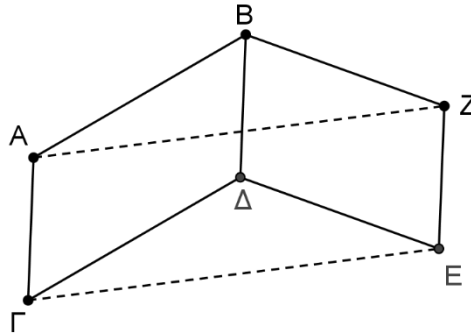
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο  $ΑΓΕΖ$  είναι παραλληλόγραμμο,

(Μονάδες 13)

β)  $\hat{ΑΒΖ} = \hat{ΓΔΕ}$ .

(Μονάδες 12)



Θέμα 36328

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Φέρουμε ημιευθεία  $Ax$  παράλληλη στη  $B\Gamma$  (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η  $AM$  με το σημείο  $\Gamma$ ).

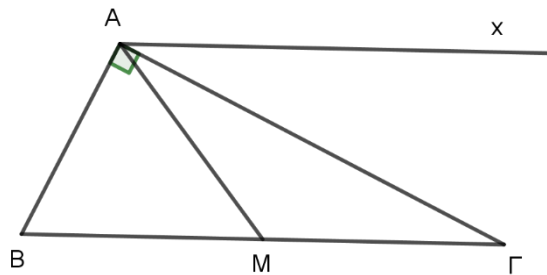
Να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A}$ ,

(Μονάδες 12)

β) η  $A\Gamma$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $MAx$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 36329

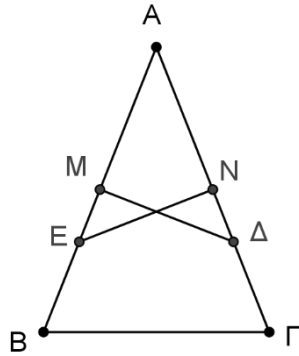
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $M\Delta$ ,  $NE$  οι μεσοκάθετοι των πλευρών του  $AB$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι  $M\Delta = NE$ , τότε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Αν είναι  $AB = A\Gamma$ , τότε  $M\Delta = NE$ . (Μονάδες 13)



Θέμα 36330

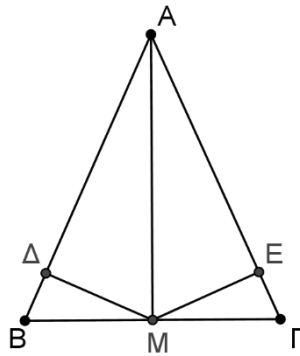
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και από σημείο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $M\Delta$  και  $ME$  στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι  $M\Delta = ME$ , τότε τα τρίγωνα  $AM\Delta$  και  $AME$  είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν είναι  $AB = A\Gamma$  και  $M$  μέσο του  $B\Gamma$ , τότε  $M\Delta = ME$ . (Μονάδες 12)



Θέμα 36331

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και από το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $M\Delta$  και  $ME$  στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Αν είναι  $M\Delta = ME$ , τότε:

i. τα τρίγωνα  $B\Delta M$  και  $\Gamma E M$  είναι ίσα,

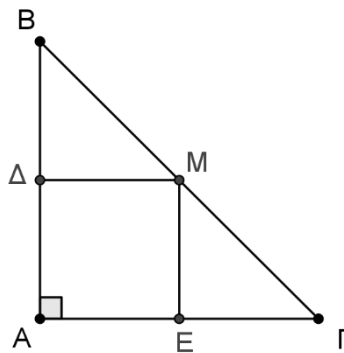
(Μονάδες 8)

ii. το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

β) Αν είναι  $AB = A\Gamma$ , τότε  $M\Delta = ME$ .

(Μονάδες 8)



Θέμα 36332

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε σημείο  $\Delta$  και στην προέκταση της  $\Gamma B$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  έτσι ώστε  $\Gamma\Delta = BE$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta H$  κάθετη στην ευθεία  $A\Gamma$  και από το  $E$  φέρουμε  $EZ$  κάθετη στην ευθεία  $AB$ .

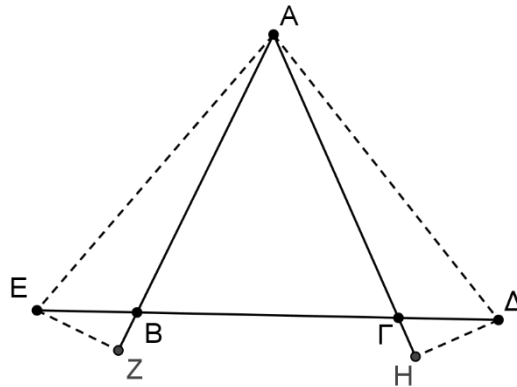
Να αποδείξετε ότι:

α)  $A\Delta = AE$

(Μονάδες 12)

β)  $EZ = \Delta H$

(Μονάδες 13)



Θέμα 36333

ΘΕΜΑ 2

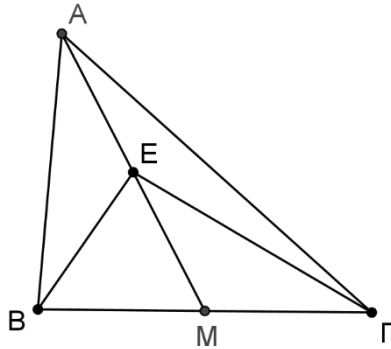
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $E$  το μέσο της διαμέσου του  $AM$ . Αν είναι  $B\Gamma = 2 BE$ , τότε να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{AEB} = \hat{EM\Gamma}$

(Μονάδες 12)

β)  $AB = E\Gamma$

(Μονάδες 13)



Θέμα 36336

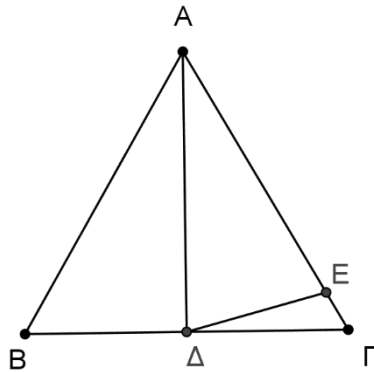
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και η διάμεσός του  $A\Delta$  τέτοια ώστε  $\widehat{B\Delta A} = 30^\circ$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην  $A\Gamma$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = AE$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $A\Delta E$ . (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{E\Delta\Gamma}$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 36337

## ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) θεωρούμε τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  των πλευρών του  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

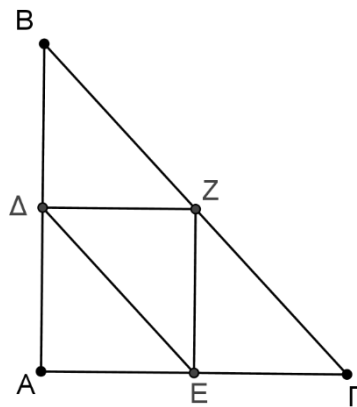
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο  $AEZ\Delta$  είναι τετράγωνο,

(Μονάδες 15)

β) το τετράπλευρο  $E\Delta B\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



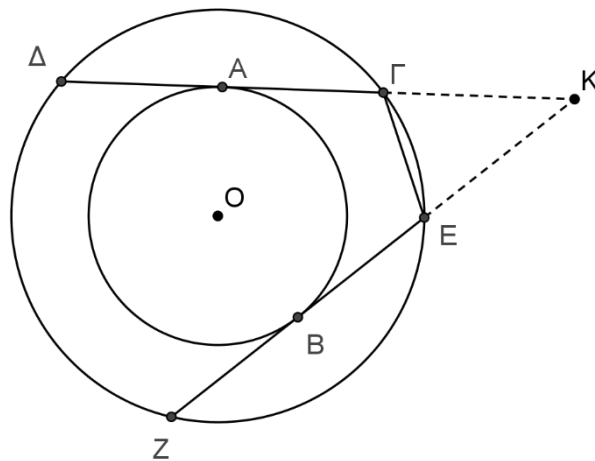
Θέμα 36338

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο  $O$  και ακτίνες  $\rho$  και  $R$  ( $\rho < R$ ). Οι χορδές  $\Delta\Gamma$  και  $Z\epsilon$  του κύκλου  $(O,R)$  εφάπτονται του κύκλου  $(O,\rho)$  στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $\Delta\Gamma = Z\epsilon$ . (Μονάδες 12)

β) Αν οι  $\Delta\Gamma$  και  $Z\epsilon$  προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο  $K$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ΚΕΓ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)



Θέμα 36339

## ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί, το  $M$  είναι το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$ , και τα τμήματα  $B\Delta$  και  $E\Gamma$  είναι κάθετα στη  $B\Gamma$  στα σημεία  $B, \Gamma$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $M\Delta = ME$ .

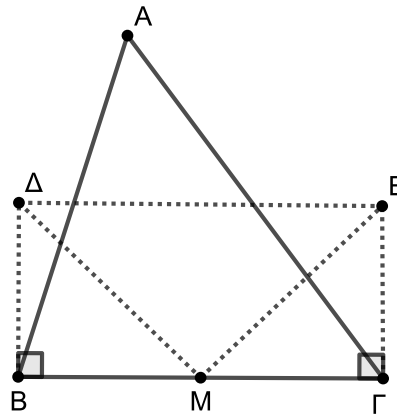
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  είναι ίσα,

(Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο  $B\Delta E\Gamma$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 12)



Θέμα 36340

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Delta\Gamma$  και  $A\Delta = B\Gamma$ ), το μέσο  $M$  της πλευράς  $\Delta\Gamma$  και τα μέσα  $K$  και  $\Lambda$  των μη παράλληλων πλευρών του  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

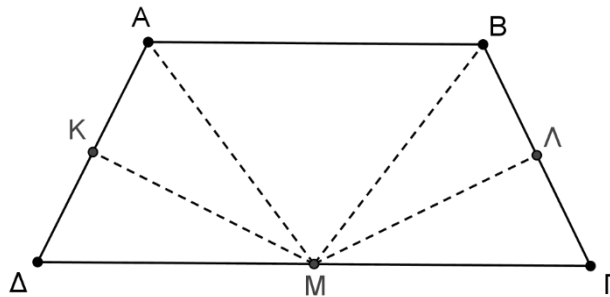
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα  $KM$  και  $\Lambda M$  είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) Τα τμήματα  $AM$  και  $BM$  είναι ίσα.

(Μονάδες 13)



Θέμα 36341

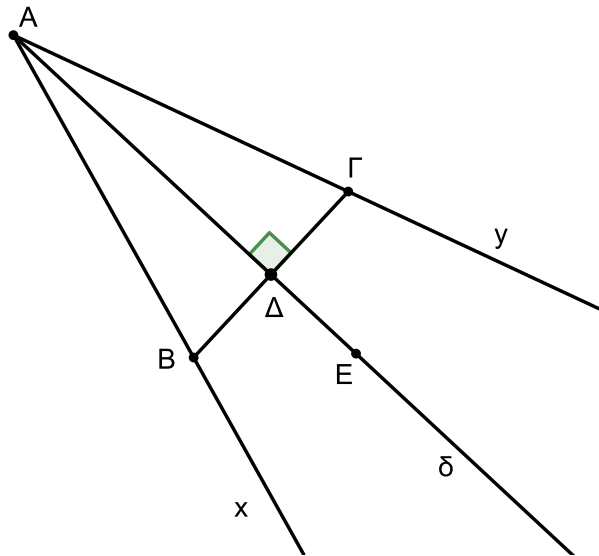
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία  $\alpha\beta\gamma$  και η διχοτόμος της  $\alpha\delta$ . Από τυχαίο σημείο  $B$  της  $\alpha\chi$  φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο  $\alpha\delta$ , η οποία τέμνει την  $\alpha\delta$  στο σημείο  $\Delta$  και την  $\alpha\gamma$  στο σημείο  $\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$  είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Αν  $E$  τυχαίο σημείο της  $\alpha\delta$ , να αποδείξετε ότι το  $E$  ισαπέχει από τα  $B$  και  $\Gamma$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 36342

## ΘΕΜΑ 2

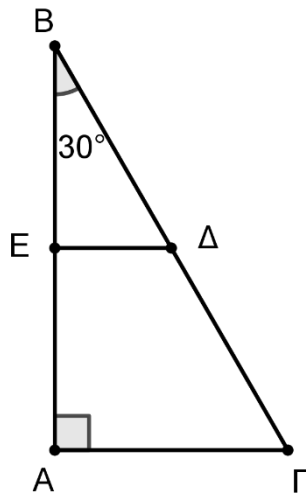
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{B} = 30^\circ$ . Αν τα σημεία  $E$  και  $\Delta$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα με  $E\Delta=1$ , να υπολογίσετε τα τμήματα:

α)  $A\Gamma$  (Μονάδες 8)

β)  $B\Gamma$  (Μονάδες 9)

γ)  $A\Delta$  (Μονάδες 8)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Θέμα 36343

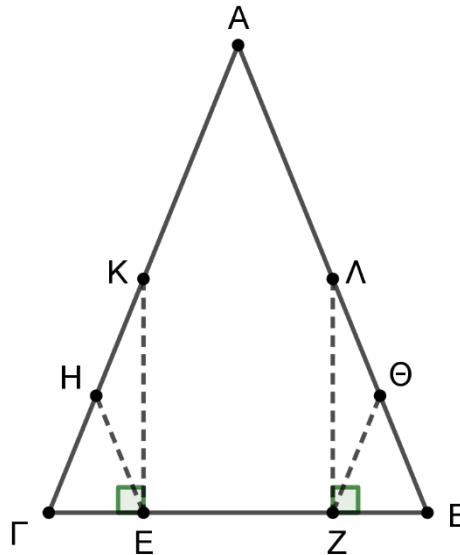
ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=AG$ . Από τα μέσα  $K$  και  $\Lambda$  των πλευρών  $AG$  και  $AB$  αντίστοιχα, φέρουμε τα κάθετα τμήματα  $KE$  και  $\Lambda Z$  στην πλευρά  $B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $KE\Gamma$  και  $\Lambda ZB$  είναι ίσα. (Μονάδες 15)

β)  $E\text{H}=\text{Z}\Theta$ , όπου  $H$ ,  $\Theta$  τα μέσα των τμημάτων  $K\Gamma$ ,  $\Lambda B$  αντίστοιχα. (Μονάδες 10)



Θέμα 36344

## ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Σε σημείο  $N$  του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του  $N$  θεωρούμε σημεία  $A$  και  $B$ , τέτοια ώστε  $NA=NB$ . Οι  $OA$  και  $OB$  τέμνουν τον κύκλο στα  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα.

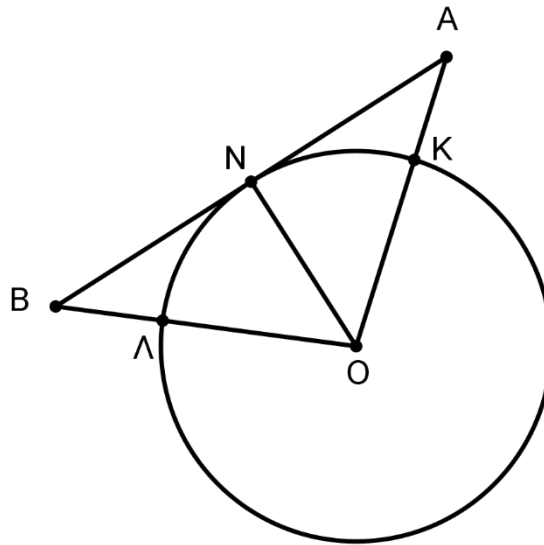
Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $AOB$  είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 13)

β) το σημείο  $N$  είναι μέσο του τόξου  $K\Lambda$ .

(Μονάδες 12)



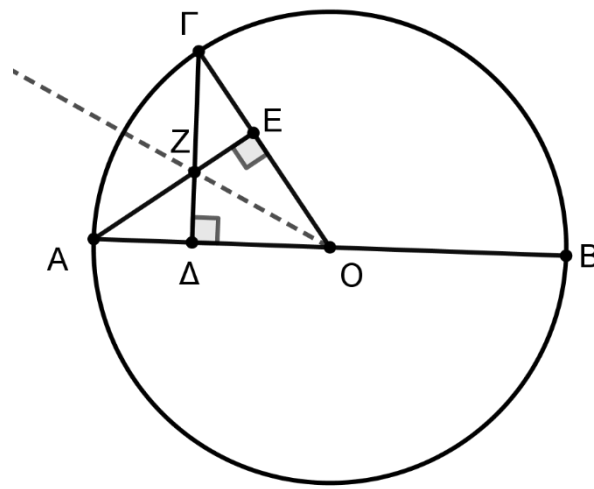
Θέμα 36345

ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Θεωρούμε διάμετρο  $AB$  και τυχαίο σημείο  $\Gamma$  του κύκλου. Αν τα  $AE, \Gamma\Delta$  είναι κάθετα τμήματα στις  $OG, OA$  αντίστοιχα και  $Z$  το σημείο τομής τους, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $\Delta OE$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 13)

β) η  $OZ$  διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{AOG}$  και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου  $AG$ . (Μονάδες 12)



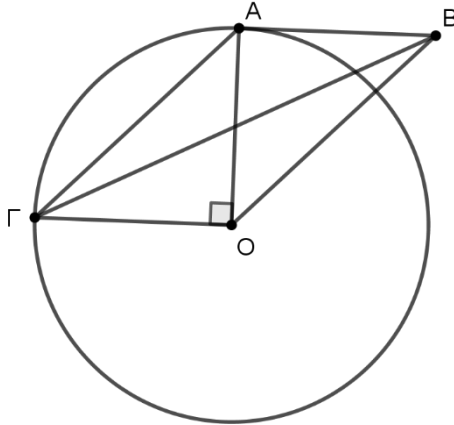
Θέμα 36348

## ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες  $OA$ ,  $OG$  και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα  $AB$  τέτοιο ώστε  $AB = OG$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα  $AO$  και  $BΓ$  διχοτομούνται. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $ABOG$ . (Μονάδες 15)



Θέμα 36349

## ΘΕΜΑ 2

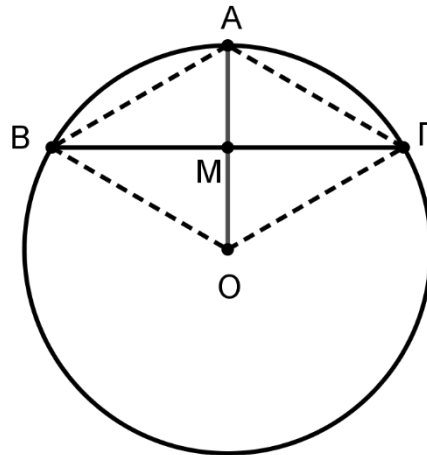
Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$ . Θεωρούμε ακτίνα  $OA$  και χορδή  $B\Gamma$  κάθετη στο μέσο της  $M$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΑΓΟΒ$  είναι ρόμβος.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου  $ΑΓΟΒ$ .

(Μονάδες 15)



Θέμα 36350

## ΘΕΜΑ 2

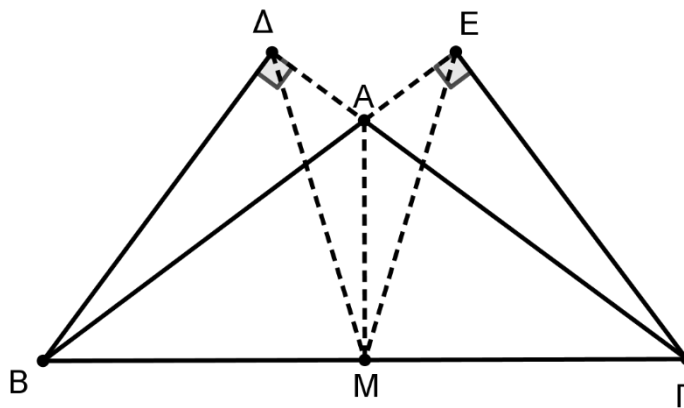
Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  προς το  $A$  φέρνουμε τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  κάθετα στις  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ . (Μονάδες 10)

β) Αν το σημείο  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , τότε να αποδείξετε ότι:

i.  $M\Delta = ME$ , (Μονάδες 8)

ii. η  $MA$  διχοτομεί τη γωνία  $\widehat{\Delta ME}$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 36351

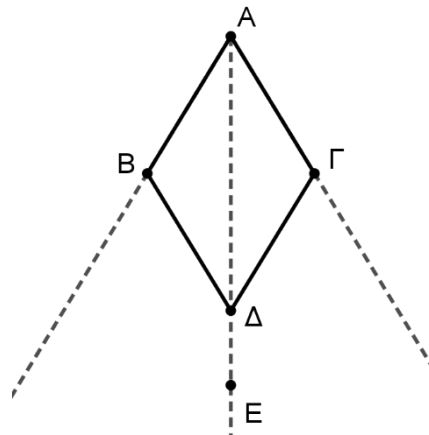
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ρόμβος  $ΑΒΔΓ$ . Στην προέκταση της διαγωνίου του  $ΑΔ$  (προς το  $Δ$ ) παίρνουμε τυχαίο σημείο  $Ε$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το σημείο  $Ε$  ισαπέχει από τις προεκτάσεις των πλευρών  $ΑΒ$  και  $ΑΓ$  (προς το μέρος των  $Β$  και  $Γ$  αντίστοιχα). (Μονάδες 10)

β) Το σημείο  $Ε$  ισαπέχει από τα σημεία  $Β$  και  $Γ$ . (Μονάδες 15)



Θέμα 36353

ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο κέντρου  $O$  και ακτίνας  $\rho$  φέρουμε δυο διαμέτρους του  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) οι χορδές  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  του κύκλου είναι ίσες, (Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία  $A, \Gamma, B$  και  $\Delta$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 12)

Θέμα 36354

## ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος  $(O, \rho)$  και ένα εξωτερικό του σημείο  $A$ . Από το  $A$  φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$  του κύκλου και έστω  $E$  και  $\Delta$  τα αντιδιαμετρικά σημεία των  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.

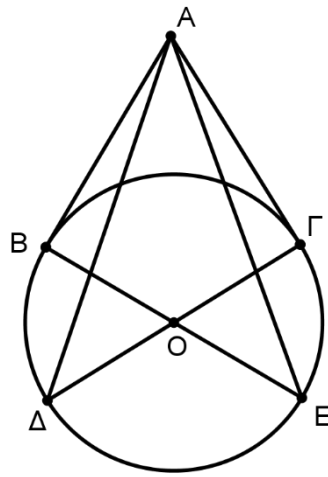
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $ABE$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ίσα,

(Μονάδες 13)

β) τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα.

(Μονάδες 12)



Θέμα 36355

## ΘΕΜΑ 2

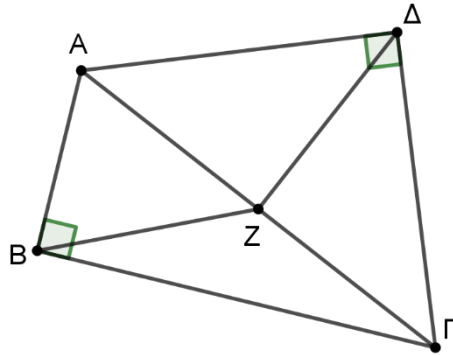
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{B} = 90^\circ$  και  $Z$  το μέσο του  $A\Gamma$ . Με υποτείνουσα το  $A\Gamma$  κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  με  $\widehat{\Delta} = 90^\circ$  και  $\Delta A = \Delta\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $BZ = \Delta Z$ .

(Μονάδες 13)

β) Αν είναι  $\widehat{A\Gamma B} = 30^\circ$ , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{B\Delta\Delta}$  και  $\widehat{B\Gamma\Delta}$ .

(Μονάδες 12)



Θέμα 36356

## ΘΕΜΑ 2

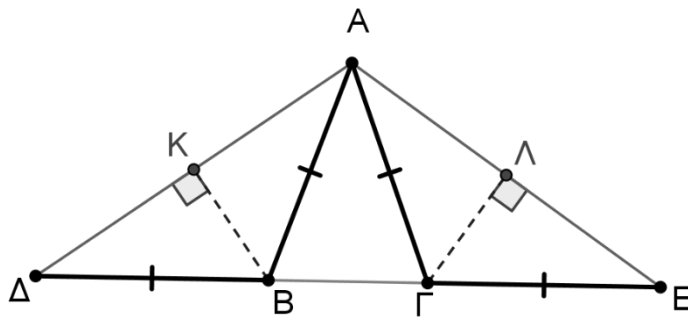
Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Delta$  με  $AB = B\Delta = 5$  και  $A\Gamma E$  με  $A\Gamma = \Gamma E = 5$  έτσι ώστε τα σημεία  $\Delta$ ,  $B$ ,  $\Gamma$  και  $E$  να είναι συνευθειακά. Θεωρούμε τα ύψη τους  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma E$  είναι ισοσκελή, (Μονάδες 8)
- ii. τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των τμημάτων  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. (Μονάδες 8)

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι 12, να υπολογίσετε το τμήμα  $K\Lambda$ .

(Μονάδες 9)



Θέμα 37006

## ΘΕΜΑ 2

Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$  φέρουμε το ύψος του  $A\Delta$  και την διάμεσο  $AM$  στην πλευρά  $B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma A\Delta}$  είναι ίσες, (Μονάδες 12)

β)  $\hat{A M \Delta} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$ . (Μονάδες 13)

Θέμα 37007

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$  με  $\widehat{Β}=60^\circ$ . Φέρουμε τα ύψη  $ΑΕ$  και  $ΒΖ$  του παραλληλογράμμου  $ΑΒΓΔ$  που αντιστοιχούν στην ευθεία  $ΔΓ$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $ΓΖ = \frac{ΑΔ}{2}$ , (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο  $ΑΔΕ$  είναι ίσο με το τρίγωνο  $ΒΓΖ$ , (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο  $ΑΒΖΕ$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

Θέμα 37008

ΘΕΜΑ 2

Έστω ορθογώνιο  $ΑΒΓΔ$  και τα σημεία  $N$  και  $K$  των  $ΑΒ$  και  $ΔΓ$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $ΑΝ = ΚΓ$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $ΑΝΔ$  και  $ΒΓΚ$  είναι ίσα, (Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο  $ΝΒΚΔ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

Θέμα 37009

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε την παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $E\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $A\hat{\Delta}E$ . (Μονάδες 9)

γ) Αν η γωνία  $\hat{B}$  είναι  $20^\circ$  μεγαλύτερη της γωνίας  $\hat{\Gamma}$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $E\hat{\Delta}\Gamma$ . (Μονάδες 7)

Θέμα 37010

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB//\Gamma\Delta$ ) με  $AB=8$  και  $\Delta\Gamma=12$ . Αν  $AH$  και  $B\Theta$  είναι τα ύψη του τραapeζίου  $AB\Gamma\Delta$ ,

α) να αποδείξετε ότι  $\Delta H = \Theta\Gamma$ . (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραapeζίου. (Μονάδες 13)

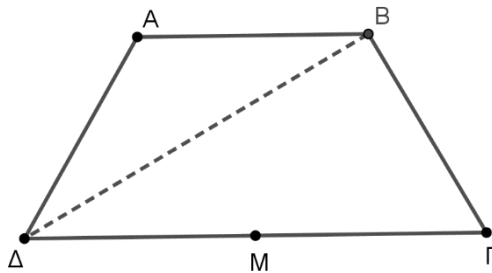
Θέμα 37011

## ΘΕΜΑ 2

Στο τραπέζιο του παρακάτω σχήματος έχουμε  $AB=AD=\frac{\Gamma\Delta}{2}$ ,  $\hat{\Delta}=60^\circ$  και M το μέσο της πλευράς ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

- α) η διαγώνιος ΔΒ του τραpezίου είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Delta}$ , (Μονάδες 9)  
β) η ΒΜ χωρίζει το τραπέζιο σε ένα ρόμβο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 16)



Θέμα 37012

## ΘΕΜΑ 2

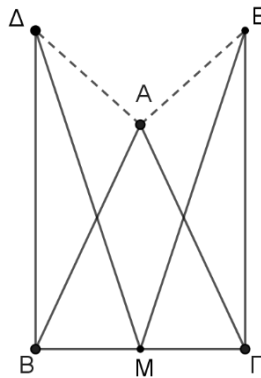
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ). Στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  της  $B\Gamma$  φέρουμε προς το ίδιο μέρος της  $B\Gamma$ , τα τμήματα  $B\Delta \perp B\Gamma$  και  $\Gamma E \perp B\Gamma$  τέτοια ώστε  $B\Delta = \Gamma E$ . Αν  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα  $B\Delta M$  και  $\Gamma E M$  είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β)  $A\Delta = AE$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 37013

## ΘΕΜΑ 2

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ).

α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα  $\Delta$  και  $E$  των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, ισαπέχουν από τη βάση  $B\Gamma$ . (Μονάδες 13)

β) Αν  $\hat{A} = 75^\circ + \hat{B}$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 12)

Θέμα 37014

## ΘΕΜΑ 2

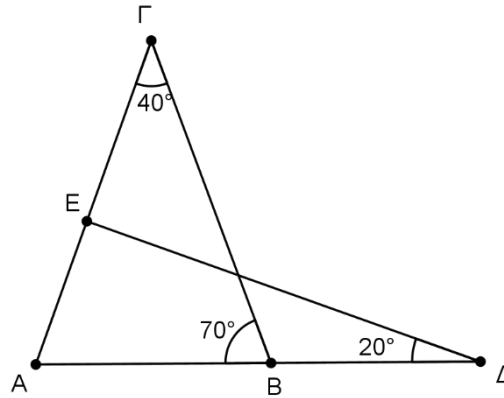
Στο παρακάτω σχήμα, να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές,

(Μονάδες 12)

β) η γωνία  $AE\Delta$  είναι ορθή.

(Μονάδες 13)



Θέμα 37015

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  κατά τμήμα  $M\Delta = MA$ . Από το  $A$  φέρουμε παράλληλη προς τη  $B\Gamma$  η οποία τέμνει την προέκταση της  $\Delta\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο  $AB\Delta\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

β)  $BM = \frac{AE}{2}$ . (Μονάδες 13)

Θέμα 37016

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  τέτοιο, ώστε  $A\Gamma < AB$ . Στην πλευρά  $AB$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = A\Gamma$  και στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $AE = A\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα  $\Delta\Gamma$  και  $E\Gamma$  είναι κάθετα μεταξύ τους, (Μονάδες 12)

β) η γωνία  $E\hat{A}\Gamma$  είναι διπλάσια της γωνίας  $A\hat{\Delta}\Gamma$ . (Μονάδες 13)

Θέμα 37017

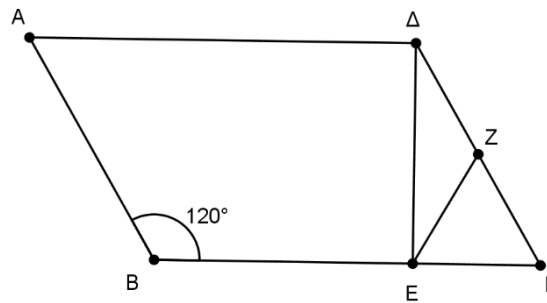
ΘΕΜΑ 2

Σε παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  είναι  $\widehat{B} = 120^\circ$  και  $ΔE \perp BΓ$ . Έστω  $EZ$  η διάμεσος του τριγώνου  $ΔEΓ$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{A}$  και  $\widehat{Γ}$  του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 8)

β) Αν  $K$  είναι το μέσο της πλευράς  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $EZ = AK$ . (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{EΖΓ}$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 37075

## ΘΕΜΑ 4

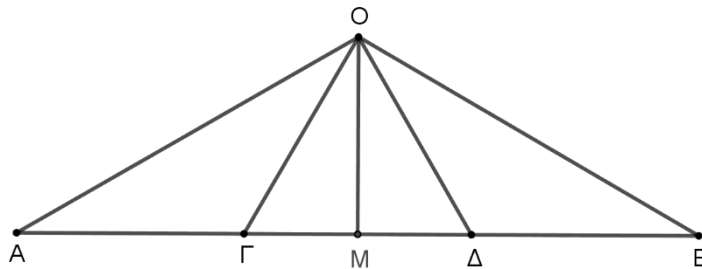
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία  $\Gamma, \Delta$  ώστε να ισχύει  $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$ . Επίσης θεωρούμε σημείο  $O$  εκτός του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  έτσι ώστε να ισχύουν  $O\Gamma = A\Gamma$  και  $O\Delta = \Delta B$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η γωνία  $\widehat{\Gamma O \Delta}$  είναι  $60^\circ$ , (Μονάδες 9)
- ii. οι γωνίες  $\widehat{O \hat{A} \Gamma}, \widehat{O \hat{B} \Delta}$  είναι ίσες και κάθε μία ίση με  $30^\circ$ . (Μονάδες 9)

β) Αν  $M$  το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $2OM = OA$ .

(Μονάδες 7)



Θέμα 37080

## ΘΕΜΑ 4

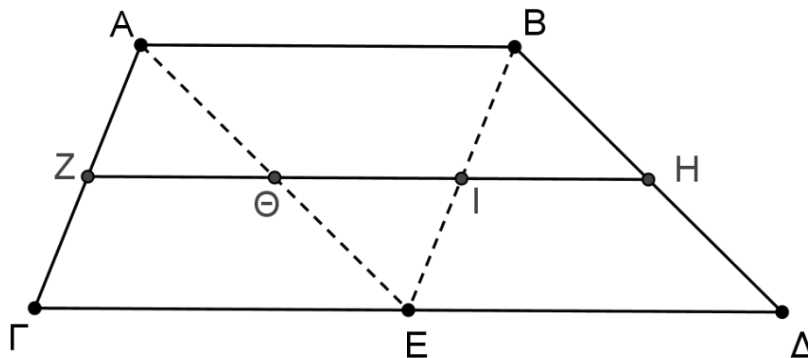
Σε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) είναι  $\Gamma\Delta = 2AB$ . Επίσης, τα σημεία  $Z$ ,  $H$  και  $E$  είναι τα μέσα των  $A\Delta$ ,  $B\Gamma$  και  $\Delta\Gamma$  αντίστοιχα. Ακόμη η  $ZH$  τέμνει τις  $AE$ ,  $BE$  στα σημεία  $\Theta$ ,  $I$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι:

i. τα σημεία  $\Theta$ ,  $I$  είναι μέσα των  $AE$ ,  $BE$  αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

ii.  $ZH = \frac{3}{2}AB$ . (Μονάδες 10)



Θέμα 37082

## ΘΕΜΑ 4

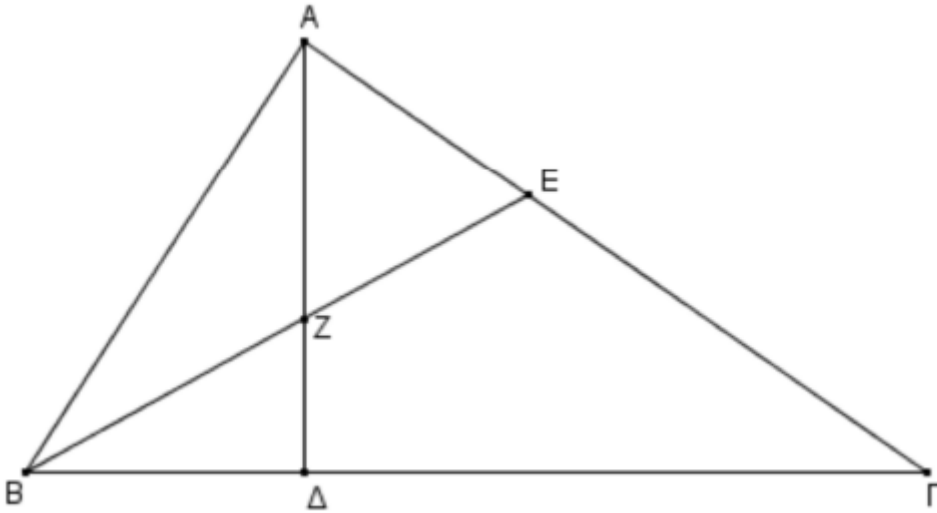
Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2\widehat{B}$  και έστω  $A\Delta$  ύψος και  $BE$  διχοτόμος του τριγώνου που τέμνονται στο  $Z$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\widehat{B} = 60^\circ$  και  $AZ=BZ$ , (Μονάδες 10)

ii.  $A\Delta = \frac{3}{2}BZ$  (Μονάδες 8)

β) Αν είναι γνωστό ότι το τρίγωνο  $AZE$  είναι ισόπλευρο, να υπολογίσετε τις άλλες γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 7)

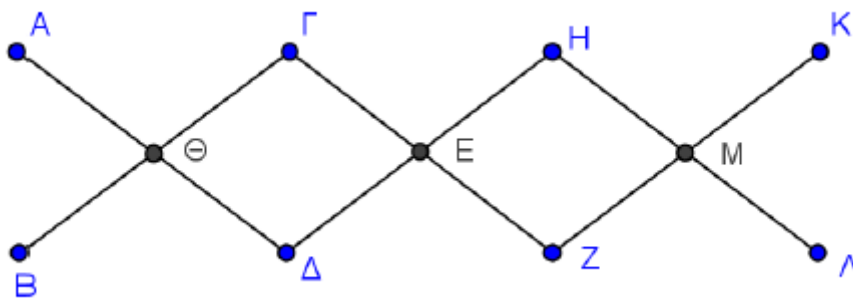


Θέμα 37083

## ΘΕΜΑ 4

Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου (ΑΔ, ΒΓ, ΓΖ, ΔΗ, ΖΚ, ΗΛ) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά (Α, Β, Γ, Δ, Θ, Ε, Μ, Η, Κ, Λ, Ζ). Αν το σημείο Θ, είναι μέσο των τμημάτων ΑΔ και ΒΓ ενώ το σημείο Ε είναι μέσο των τμημάτων ΓΖ και ΔΗ, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο ΓΗΖΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)  
 β) Τα σημεία Β, Δ, Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)  
 γ) Το τετράπλευρο ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



Θέμα 37084

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθεία ( $\epsilon$ ) και δυο σημεία  $A, B$  εκτός αυτής έτσι ώστε η ευθεία  $AB$  να μην είναι κάθετη στην ( $\epsilon$ ). Φέρουμε  $AD, BG$  κάθετες στην ( $\epsilon$ ) και  $M, N$  μέσα των  $AB$  και  $GD$  αντίστοιχα.

α) Αν τα  $A, B$  είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο σε σχέση με την ( $\epsilon$ ),

i. να εξετάσετε αν το τετράπλευρο  $ABGD$  είναι παραλληλόγραμμο, τραπέζιο ή ορθογώνιο σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αιτιολογώντας την απάντησή σας:

1)  $AD < BG$  (Μονάδες 5)

2)  $AD = BG$  (Μονάδες 5)

ii. να εκφράσετε το τμήμα  $MN$  σε σχέση με τα τμήματα  $AD, BG$  στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις. (Μονάδες 6)

β) Αν η ευθεία ( $\epsilon$ ) τέμνει το τμήμα  $AB$  στο μέσο του  $M$ , να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου  $ABGD$  (παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, ορθογώνιο), αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

Θέμα 37085

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , τα ύψη του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  που τέμνονται στο σημείο  $H$  και το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

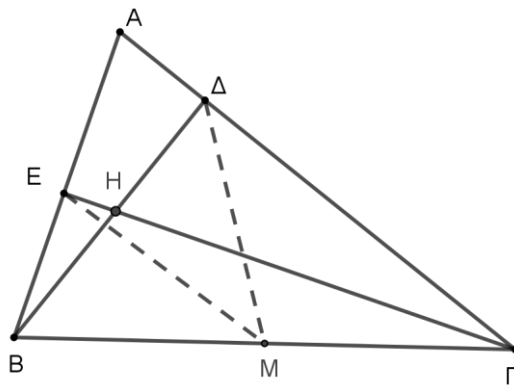
i.  $M\Delta = ME$ , (Μονάδες 10)

ii. η ευθεία  $AH$  τέμνει κάθετα τη  $B\Gamma$  και ότι  $\widehat{A\hat{H}\Delta} = \widehat{\Gamma}$ , όπου  $\widehat{\Gamma}$  η γωνία του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου  $ABH$ .

(Μονάδες 10)



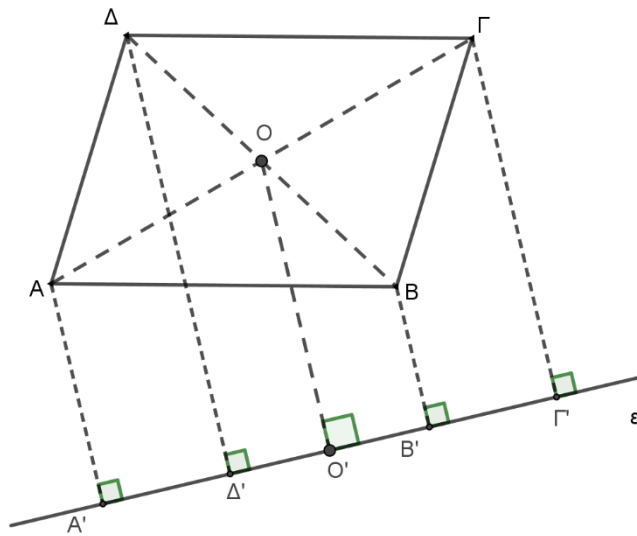
Θέμα 37086

## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και τις προβολές  $A'$ ,  $B'$ ,  $\Gamma'$ ,  $\Delta'$  και  $O'$  των κορυφών του  $A$ ,  $B$ ,  $\Gamma$ ,  $\Delta$  και του κέντρου του  $O$  αντίστοιχα, σε μία ευθεία  $\epsilon$ .

α) Αν η ευθεία ( $\epsilon$ ) αφήνει τις κορυφές του παραλληλογράμμου στο ίδιο ημιεπίπεδο (όπως στο σχήμα που ακολουθεί) και είναι  $AA' = 3$ ,  $BB' = 2$ ,  $\Gamma\Gamma' = 5$ , τότε:

- Να αποδείξετε ότι η απόσταση  $OO'$  του κέντρου  $O$  του παραλληλογράμμου από την ( $\epsilon$ ) είναι ίση με 4. (Μονάδες 8)
- Να βρείτε την απόσταση  $\Delta\Delta'$ . (Μονάδες 9)



β) Αν η ευθεία ( $\epsilon$ ) διέρχεται από το κέντρο του παραλληλογράμμου και είναι παράλληλη προς δύο απέναντι πλευρές του, τι παρατηρείτε για τις αποστάσεις  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $\Gamma\Gamma'$ ,  $\Delta\Delta'$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

Θέμα 37087

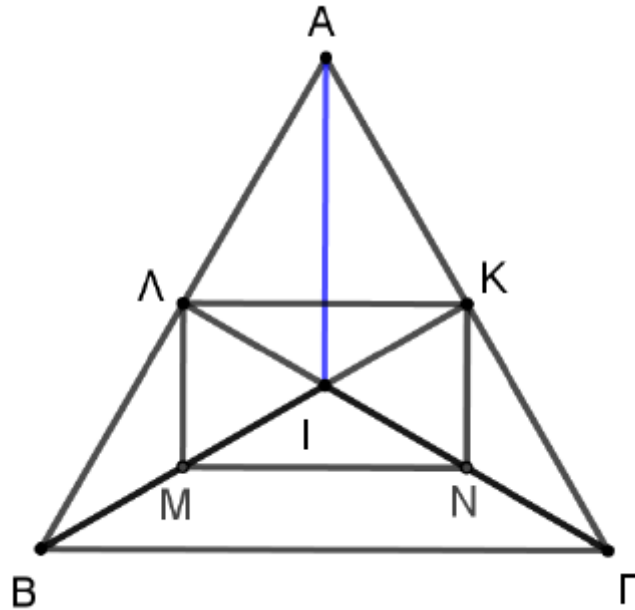
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα ύψη του  $BK$  και  $\Gamma\Lambda$ , τα οποία τέμνονται στο  $I$ .

Αν  $M$  και  $N$  είναι τα μέσα των  $IB$  και  $I\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το  $AI$  προεκτεινόμενο διέρχεται από το , μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ . (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο  $M\Lambda KN$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)



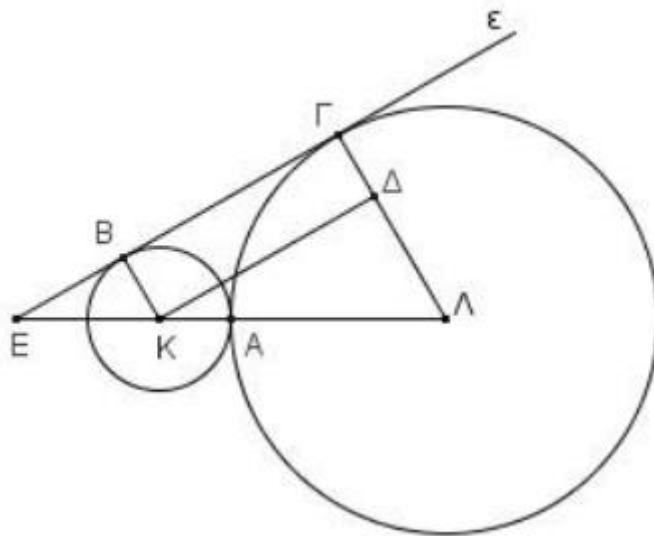
Θέμα 37088

## ΘΕΜΑ 4

Οι κύκλοι  $(K, \rho)$  και  $(\Lambda, 3\rho)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $A$ . Μία ευθεία  $(\epsilon)$  εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου  $K\Lambda$  (προς το  $K$ ) στο σημείο  $E$ . Φέρουμε από το σημείο  $K$  παράλληλο τμήμα στην  $(\epsilon)$  που τέμνει το τμήμα  $\Lambda\Gamma$  στο  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο  $B\Gamma\Delta K$  είναι ορθογώνιο, (Μονάδες 9)  
 β) η γωνία  $\Delta K\Lambda$  είναι  $30^\circ$ , (Μονάδες 8)  
 γ) το τμήμα  $E\Lambda = 6\rho$ , όπου  $\rho$  η ακτίνα του κύκλου  $(K, \rho)$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 37089

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος του  $B\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta E \perp B\Gamma$  και ονομάζουμε  $Z$  το σημείο στο οποίο η ευθεία  $E\Delta$  τέμνει την προέκταση της  $BA$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 6)
- β) τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $BEZ$  είναι ίσα, (Μονάδες 6)
- γ) η ευθεία  $B\Delta$  είναι μεσοκάθετη των τμημάτων  $AE$  και  $Z\Gamma$ , (Μονάδες 6)
- δ) το τετράπλευρο  $AE\Gamma Z$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)

Θέμα 37094

## ΘΕΜΑ 4

Έστω  $AB\Gamma$  τρίγωνο και τα ύψη του  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  που αντιστοιχούν στις πλευρές  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση:

**Π:** Αν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB=A\Gamma$ , τότε τα ύψη  $BE$  και  $\Gamma\Delta$  που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π** αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την **αντίστροφη** πρόταση της **Π** και να αποδείξετε ότι ισχύει.

(Μονάδες 10)

γ) Να διατυπώσετε την πρόταση **Π** και την **αντίστροφή της** ως ενιαία πρόταση.

(Μονάδες 5)

Θέμα 37095

ΘΕΜΑ 4

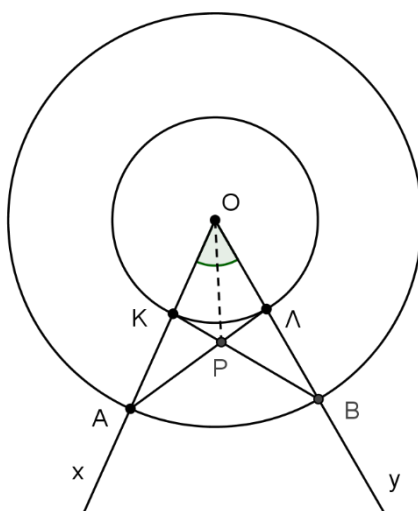
Δίνεται οξεία γωνία  $\widehat{xOy}$  και δύο ομόκεντροι κύκλοι  $(O, \rho_1)$  και  $(O, \rho_2)$  με  $\rho_1 < \rho_2$ , που τέμνουν την  $Ox$  στα σημεία  $K, A$  και στην  $Oy$  στα  $\Lambda, B$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $AL=BK$ , (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο  $APB$  είναι ισοσκελές, όπου  $P$  το σημείο τομής των  $AL$  και  $BK$ , (Μονάδες 8)

γ) η  $OP$  διχοτομεί την  $\widehat{xOy}$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 37096

ΘΕΜΑ 4

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές τα μέσα πλευρών ισοσκελούς τριγώνου είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε ανάλογη πρόταση για

i. ισόπλευρο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

ii. ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο. (Μονάδες 9)

Θέμα 37097

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ύψος του  $GE$ . Στην προέκταση της  $GB$  (προς το μέρος του  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$ . Έστω ότι, η ευθεία  $DE$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $Z$  και  $Z\Theta \parallel B\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Delta E$  είναι ισοσκελές και το τρίγωνο  $A\Theta Z$  είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $\Theta EZ$ .

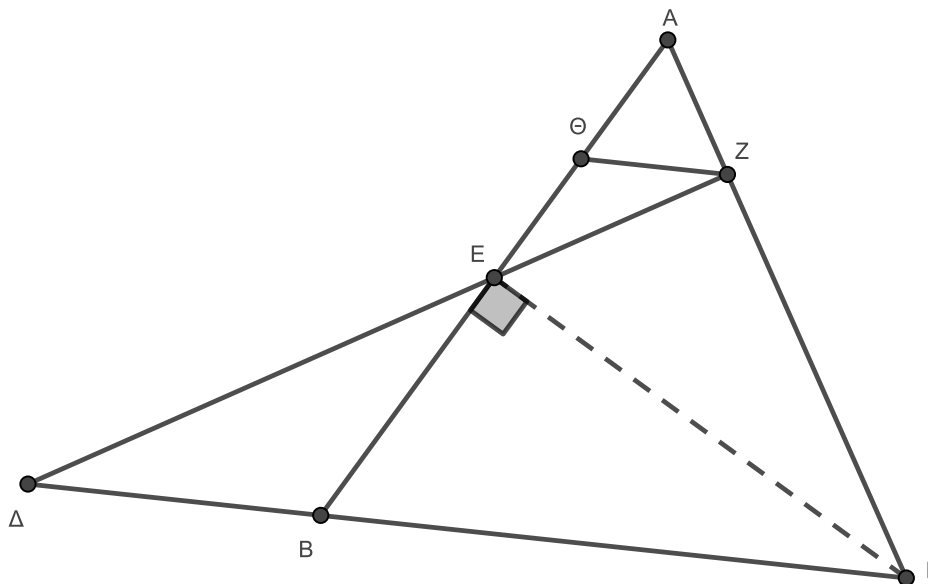
(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι  $AE = 2 \cdot \Theta Z$ .

(Μονάδες 5)

δ) Να αποδείξετε ότι  $3 \cdot AB = 4 \cdot \Theta B$ .

(Μονάδες 5)



Θέμα 37098

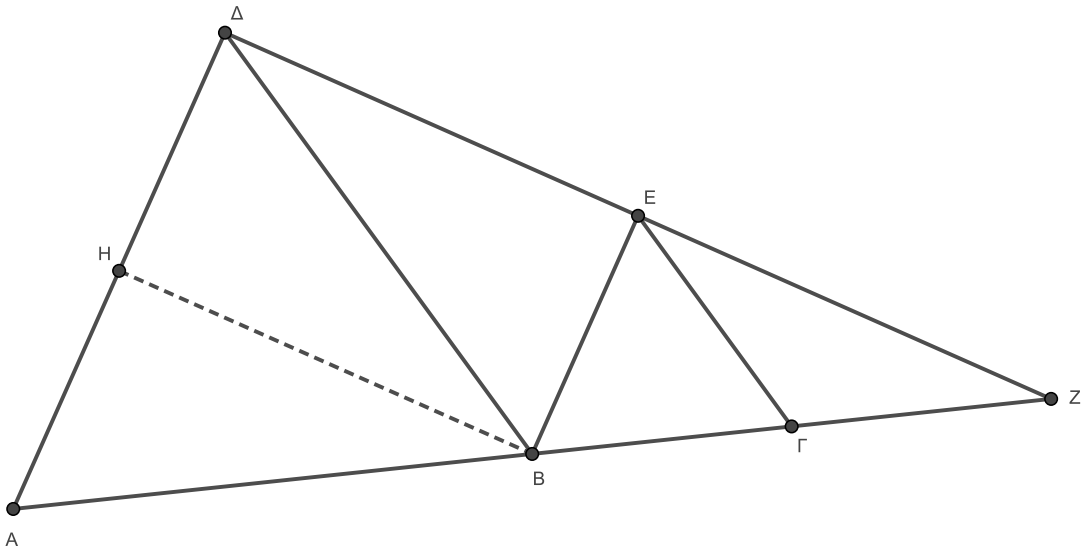
## ΘΕΜΑ 4

Σε μια ευθεία ( $\epsilon$ ) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία  $A, B, \Gamma$  έτσι ώστε  $AB = 2 \cdot B\Gamma$  και στο ίδιο ημιεπίπεδο θεωρούμε ισόπλευρα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $B\Gamma E$ . Αν  $H$  είναι το μέσο του  $A\Delta$  και η ευθεία  $\Delta E$  τέμνει την ευθεία ( $\epsilon$ ) στο σημείο  $Z$  να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $BH\Delta E$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο  $\Gamma Z E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο  $HE\Gamma A$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



Θέμα 37099

## ΘΕΜΑ 4

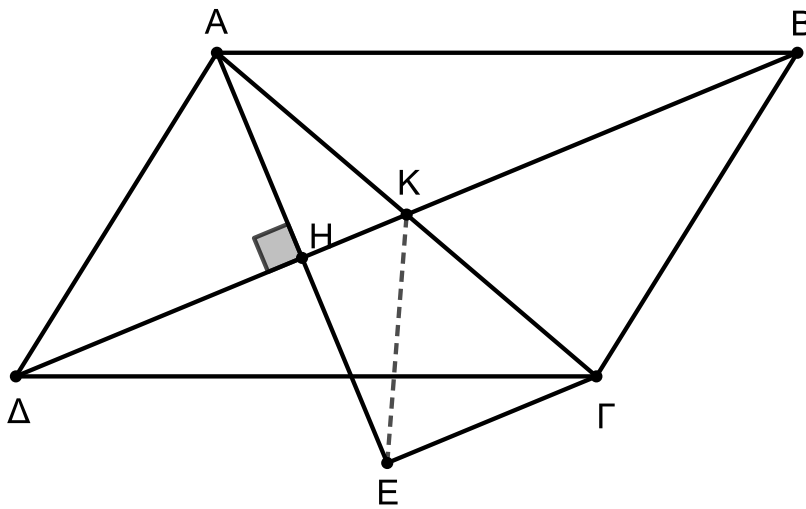
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και  $K$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Φέρουμε  $AH$  κάθετη στην  $B\Delta$  και στην προέκταση της  $AH$  (προς το  $H$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε:

$AH = HE$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $AKE$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τρίγωνο  $AEG$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο  $\Delta B\Gamma E$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



Θέμα 37100

ΘΕΜΑ 4

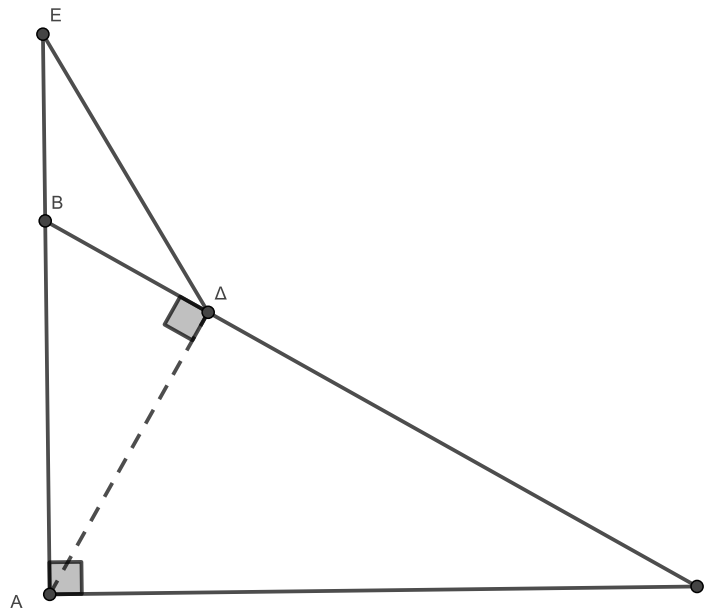
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $\hat{A}$  ορθή και  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ . Φέρουμε το ύψος του  $A\Delta$  και σημείο  $E$  στην προέκταση της  $AB$  τέτοιο ώστε  $BE = B\Delta$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $B\Delta E$ . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι:

i.  $BE = \frac{AB}{2}$ . (Μονάδες 8)

ii.  $AE = \Gamma\Delta$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 37101

ΘΕΜΑ 4

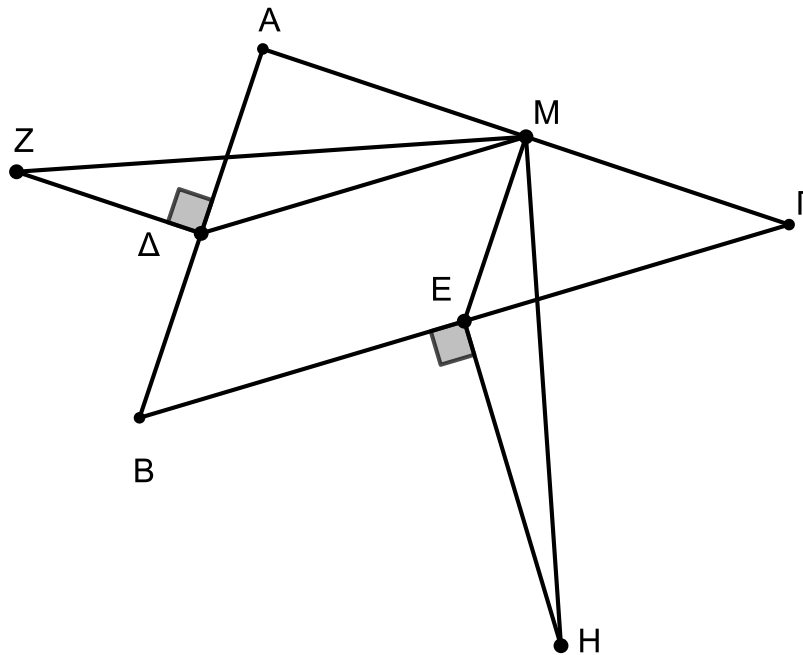
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με γωνίες  $B$  και  $\Gamma$  οξείες και  $\Delta$ ,  $M$  και  $E$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Στις μεσοκάθετες των  $AB$  και  $B\Gamma$  και εκτός του τριγώνου  $AB\Gamma$  θεωρούμε σημεία  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $\Delta Z = \frac{AB}{2}$  και  $E H = \frac{B\Gamma}{2}$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τετράπλευρο  $B\Delta M E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 5)
- ii. Τα τρίγωνα  $Z\Delta M$  και  $E M H$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Αν τα σημεία  $Z$ ,  $\Delta$ ,  $E$  είναι συνευθειακά, να αποδείξετε ότι η γωνία  $\hat{A} = 90^\circ$ .

(Μονάδες 10)



Θέμα 37102

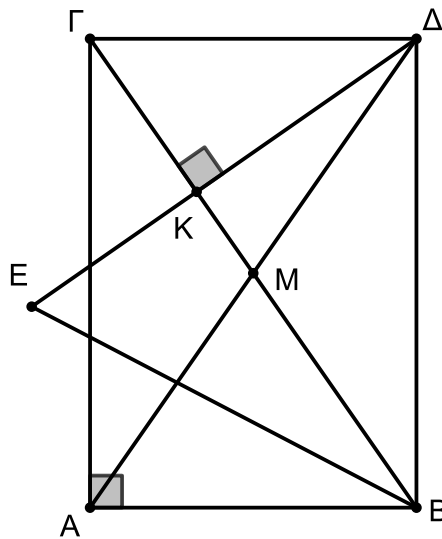
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ). Φέρουμε τη διάμεσο του  $AM$  την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του  $M$ ) κατά τμήμα  $M\Delta = AM$ . Θεωρούμε ευθεία  $\Delta K$  κάθετη στη  $B\Gamma$ , η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{B}$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο  $AB\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο (Μονάδες 8)

β)  $\widehat{KEB} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$ . (Μονάδες 8)

γ)  $\Delta E = B\Delta$  (Μονάδες 9)



Θέμα 37103

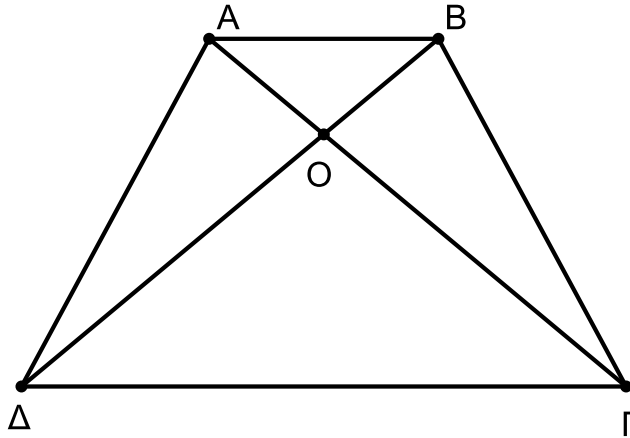
## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  ισχύουν:  $ΑΔ = ΒΓ$ ,  $ΑΓ = ΒΔ$  και  $ΑΒ < ΓΔ$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ΑΟΒ$  και  $ΔΟΓ$  είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{ΔΑΒ} = \widehat{ΑΒΓ}$ . (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΑΒΓΔ$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



Θέμα 37104

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  με  $M$  και  $N$  τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς  $B\Gamma$  τέμνει την  $AG$  στο σημείο  $E$ .

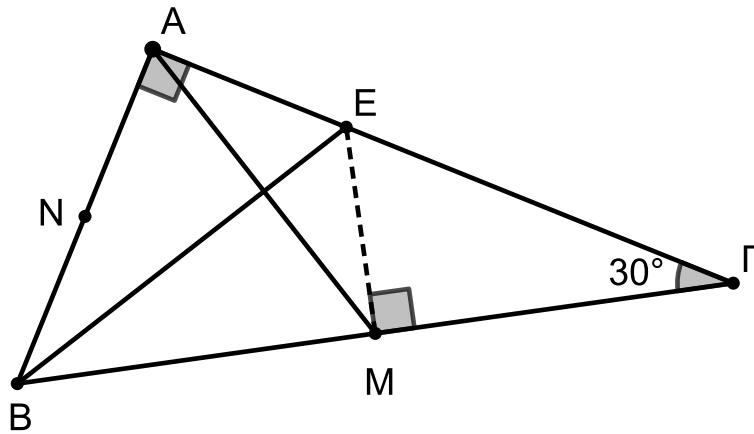
α) Να αποδείξετε ότι:

i) η  $BE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$ . (Μονάδες 6)

ii)  $AE = \frac{\Gamma E}{2}$ . (Μονάδες 6)

iii) η  $BE$  είναι μεσοκάθετος της διαμέσου  $AM$ . (Μονάδες 7)

β) Αν  $AD$  είναι το ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$  που τέμνει την  $BE$  στο  $H$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $M$ ,  $H$  και  $N$  είναι συνευθειακά. (Μονάδες 6)



Θέμα 37106

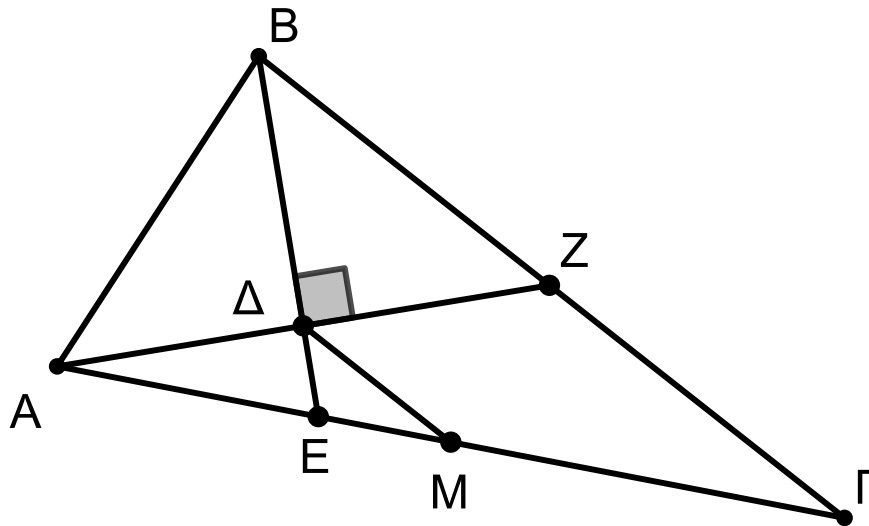
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < B\Gamma$  και η διχοτόμος  $BE$  της γωνίας  $\widehat{B}$ . Αν  $AZ \perp BE$ , όπου  $Z$  σημείο της  $B\Gamma$  και  $M$  το μέσον της  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι :

α) Το τρίγωνο  $ABZ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β)  $DM \parallel B\Gamma$  και  $DM = \frac{B\Gamma - AB}{2}$ . (Μονάδες 10)

γ)  $\widehat{E\Delta M} = \frac{\widehat{B}}{2}$ , όπου  $\widehat{B}$  η γωνία του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 37107

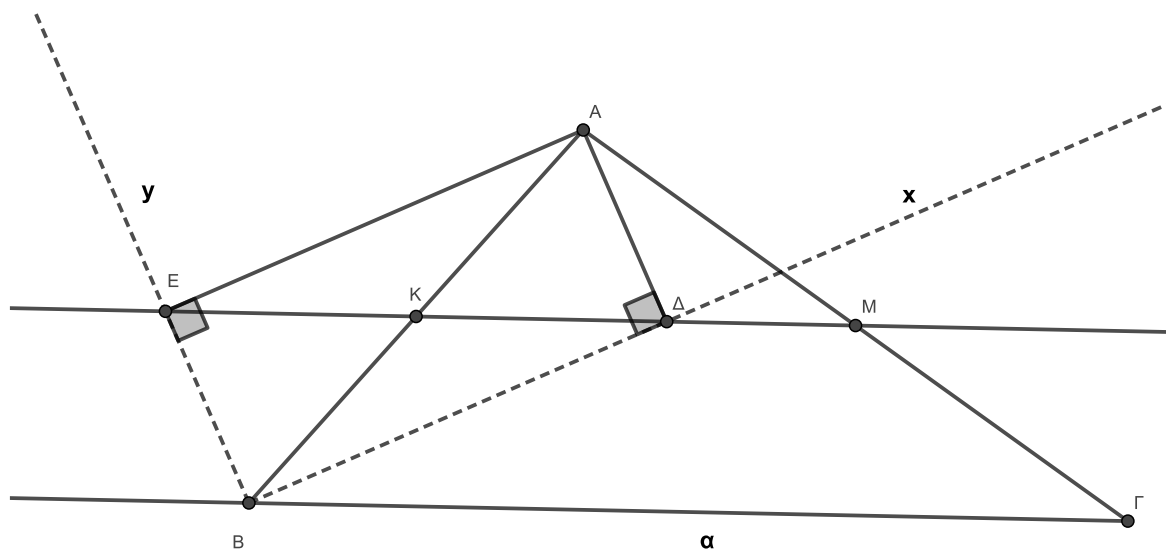
ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος Βx της γωνίας  $\widehat{B}$  του τριγώνου ΑΒΓ και η διχοτόμος Βy της εξωτερικής γωνίας  $\widehat{B}$ . Αν Δ και Ε είναι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ στην Βx και Βy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΔΒΕ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)

β) Η ευθεία ΕΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ και διέρχεται από το μέσο Μ της ΑΓ. (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με  $\frac{3 \cdot \alpha}{4}$ , όπου  $\alpha = ΒΓ$ . (Μονάδες 8)

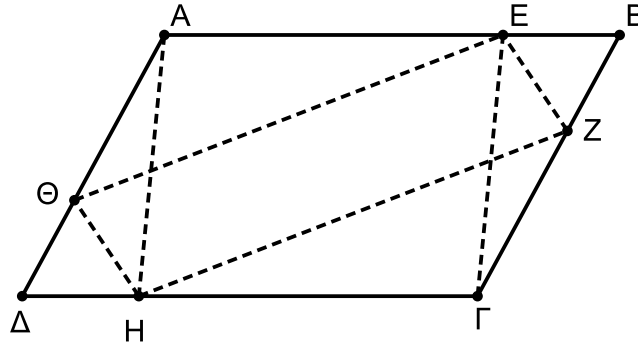


Θέμα 37108

## ΘΕΜΑ 4

Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε σημεία  $E, Z, H, \Theta$  στις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$  αντίστοιχα, με  $AE = \Gamma H$  και  $BZ = \Delta\Theta$ . Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $AE\Gamma H$  είναι παραλληλόγραμμο. (6 μονάδες)  
β) Το τετράπλευρο  $EZH\Theta$  είναι παραλληλόγραμμο. (10 μονάδες)  
γ) Τα τμήματα  $A\Gamma, B\Delta, EH$  και  $Z\Theta$  διέρχονται από το ίδιο σημείο. (9 μονάδες)



Θέμα 37109

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και σημεία  $K, Λ$  της διαγωνίου του  $ΒΔ$ , τέτοια ώστε να ισχύει  $BK = KΛ = ΛΔ$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AKΓΛ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι, αν το αρχικό παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  είναι ρόμβος, τότε και το  $AKΓΛ$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

γ) Ποια πρέπει να είναι η σχέση των διαγωνίων του αρχικού παραλληλογράμμου  $ANΓΔ$ , ώστε το  $AKΓΛ$  να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

Θέμα 37114

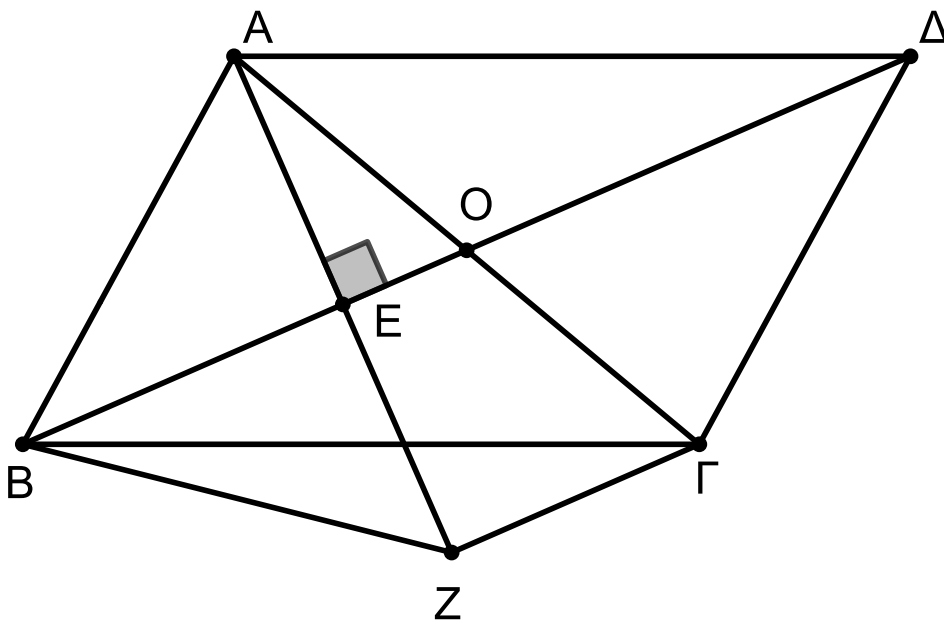
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB < A\Delta$  και έστω  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ . Φέρνουμε την  $AE$  κάθετη στην διαγώνιο  $B\Delta$ . Αν το  $Z$  είναι το συμμετρικό του  $A$  ως προς την διαγώνιο  $B\Delta$  και δεν συμπίπτει με το σημείο  $\Gamma$ , τότε να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $A\Delta Z$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β)  $Z\Gamma = 2OE$ . (Μονάδες 9)

γ) Το  $B\Delta Z\Gamma$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



Θέμα 37115

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ παίρνουμε τμήμα ΒΕ = ΑΒ και στην προέκταση της πλευράς ΑΔ τμήμα ΔΖ = ΑΔ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τετράπλευρα ΒΔΓΕ και ΒΔΖΓ είναι παραλληλόγραμμα. (Μονάδες 7)

ii. Τα σημεία Ε, Γ και Ζ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 9)

β) Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΒΕ και ΔΖ αντίστοιχα, τότε  $ΚΛ \parallel ΔΒ$  και  $ΚΛ = \frac{3}{2}ΔΒ$ .

(Μονάδες 9)

Θέμα 37116

## ΘΕΜΑ 4

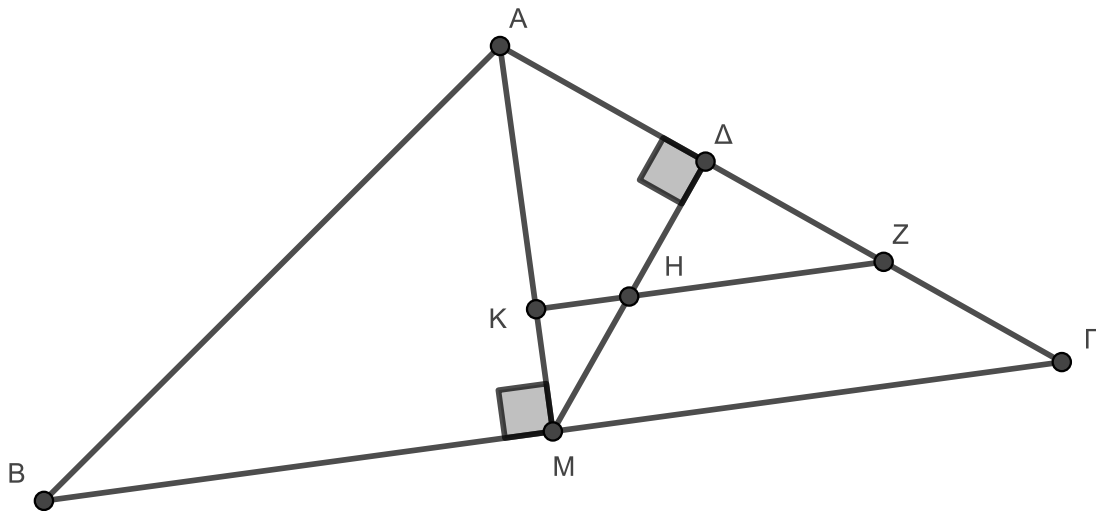
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και το ύψος του  $AM$ . Φέρουμε  $M\Delta$  κάθετη στην  $A\Gamma$  και θεωρούμε  $H$  το μέσο του τμήματος  $M\Delta$ . Από το  $H$  φέρουμε παράλληλη στη  $B\Gamma$  η οποία τέμνει τις  $AM$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $K$  και  $Z$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α)  $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$  (Μονάδες 9)

β)  $MZ \parallel B\Delta$  (Μονάδες 8)

γ) Η ευθεία  $AH$  είναι κάθετη στη  $B\Delta$ . (Μονάδες 8)



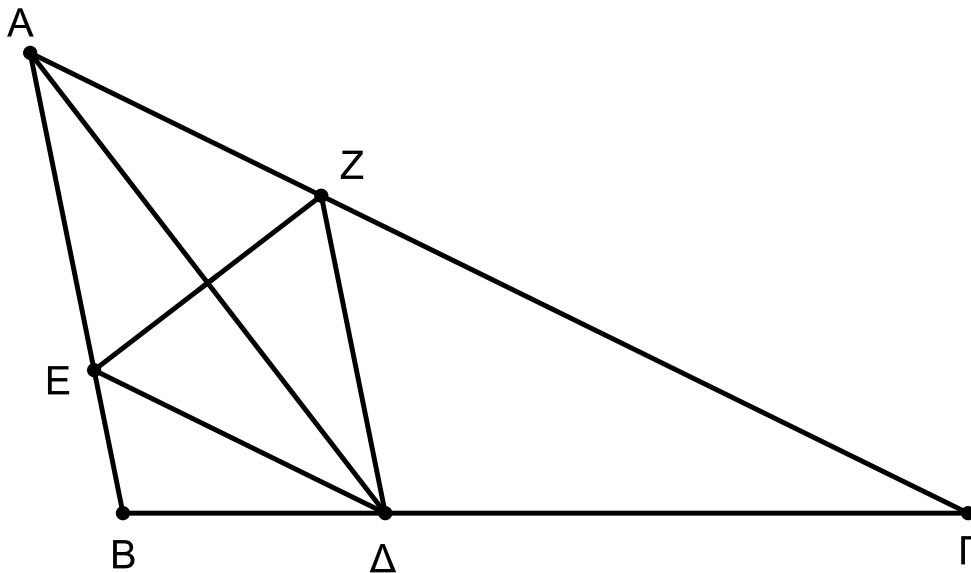
Θέμα 37117

## ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $AD$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$ , για την οποία ισχύει  $AD = \Delta\Gamma$ . Η  $\Delta E$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A\hat{\Delta}B$  και η  $\Delta Z$  παράλληλη στην  $AB$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα  $E\Delta$  και  $A\Gamma$  είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)  
β) Το τρίγωνο  $EAD$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)  
γ) Τα τμήματα  $A\Delta$  και  $EZ$  διχοτομούνται. (Μονάδες 8)



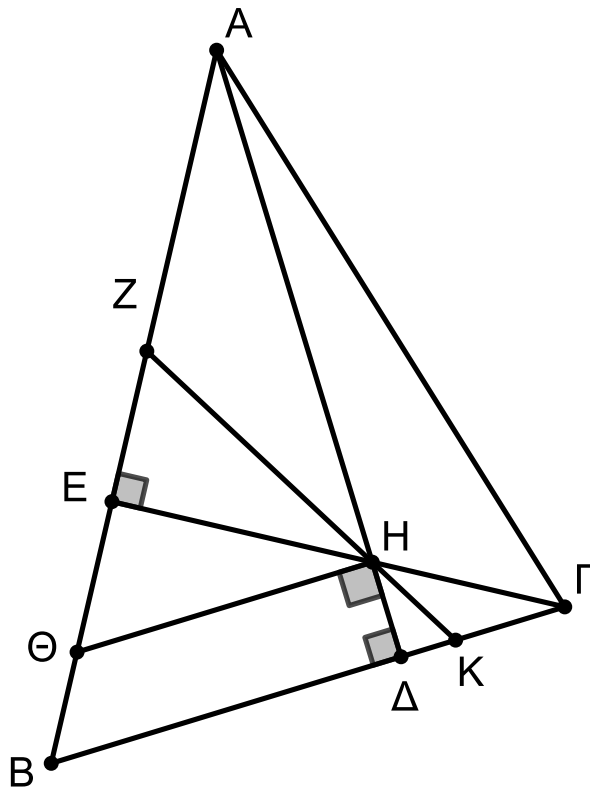
Θέμα 37118

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με γωνία  $\widehat{B} = 60^\circ$ . Φέρνουμε τα ύψη  $A\Delta$  και  $\Gamma E$  που τέμνονται στο  $H$ . Φέρνουμε  $KZ$  διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{E\Gamma A}$  και  $\Theta H$  κάθετο στο ύψος  $A\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Για το τμήμα  $ZE$  ισχύει  $ZH = 2EZ$ . (Μονάδες 9)
- β) Το τρίγωνο  $\Theta ZH$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)
- γ) Το τετράπλευρο  $\Theta HKB$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

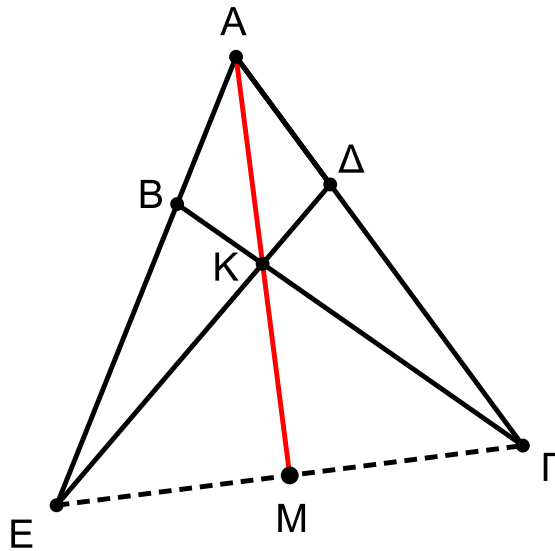


Θέμα 37124

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Στην προέκταση της  $AB$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  έτσι ώστε  $AE = A\Gamma$ . Στην πλευρά  $A\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  έτσι ώστε  $A\Delta = AB$ . Αν τα τμήματα  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  τέμνονται στο  $K$  και η προέκταση της  $AK$  τέμνει την  $E\Gamma$  στο  $M$ , τότε να αποδείξετε ότι:

- α)  $B\Gamma = \Delta E$  (Μονάδες 6)  
β)  $BK = K\Delta$  (Μονάδες 7)  
γ) Η  $AK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A$ . (Μονάδες 6)  
δ) Η  $AM$  είναι μεσοκάθετος της  $E\Gamma$ . (Μονάδες 6)



Θέμα 37125

ΘΕΜΑ 4

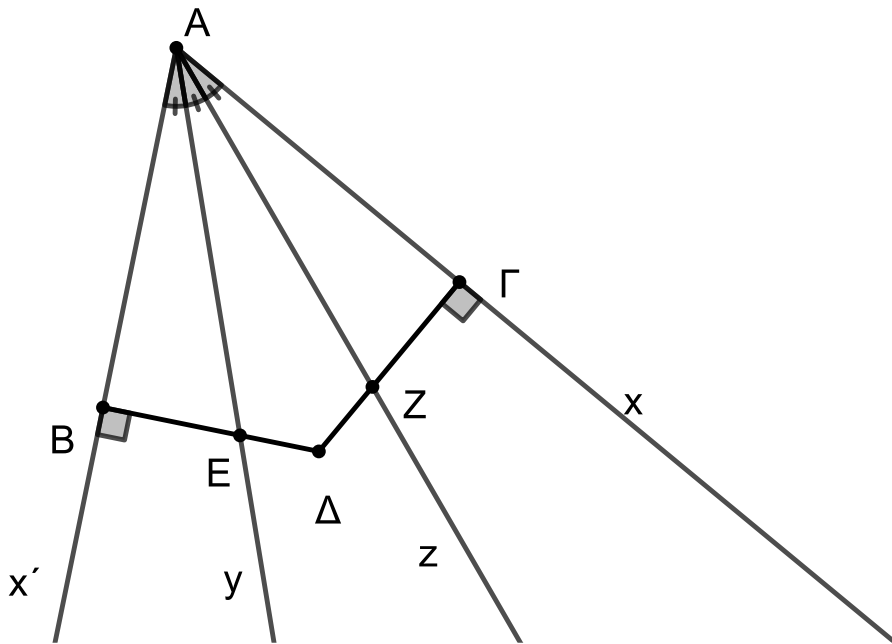
Στις πλευρές  $Ax'$  και  $Ax$  γωνίας  $x'\hat{A}x$  θεωρούμε σημεία  $B$  και  $\Gamma$  ώστε  $AB = A\Gamma$ . Οι κάθετες στις  $Ax'$  και  $Ax$  στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα, τέμνονται στο  $\Delta$ .

Αν οι ημιευθείες  $Ay$  και  $Az$  χωρίζουν τη γωνία  $x'\hat{A}x$  σε τρεις ίσες γωνίες και τέμνουν τις  $B\Delta$  και  $\Delta\Gamma$  στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $EAZ$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Το  $\Delta$  ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας  $x'\hat{A}x$ . (Μονάδες 8)

γ) Οι γωνίες  $\Gamma B\Delta$  και  $\Gamma A\Delta$  είναι ίσες. (Μονάδες 9)



Θέμα 37126

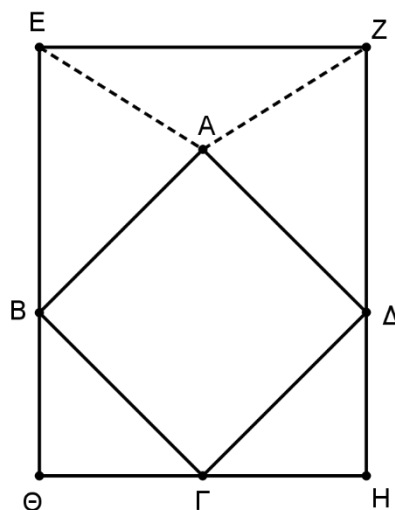
## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπυλιάρδου. Ένας παίκτης τοποθετεί μια μπάλα στο σημείο Α το οποίο ανήκει στη μεσοκάθετη της ΕΖ. Όταν ο παίκτης χτυπήσει τη μπάλα αυτή ακολουθεί τη διαδρομή  $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$  χτυπώντας στους τοίχους του μπυλιάρδου ΕΘ, ΘΗ, ΖΗ διαδοχικά. Για τη διαδρομή αυτή ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία  $\widehat{ABE}$ ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία  $\widehat{B\Gamma\Theta}$ ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι  $45^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΖΑΔ είναι ίσα. (Μονάδες 9)
- ii. Η διαδρομή ΑΒΓΔ της μπάλας είναι τετράγωνο. (Μονάδες 8)

β) Αν η ΑΖ είναι διπλάσια από την απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ. (Μονάδες 8)



Θέμα 37128

## ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $ΑΒ // ΔΓ$ ) με  $\widehat{Β} = 2 \cdot \widehat{Γ}$  και  $ΑΒ = ΒΓ = ΑΔ = \frac{ΓΔ}{2}$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{Β}$ , η οποία τέμνει το  $ΔΓ$  στο  $Κ$  και η κάθετη από το  $Κ$  προς το  $ΒΓ$  το τέμνει στο  $Μ$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του  $ΑΒΓΔ$ .

(Μονάδες 10)

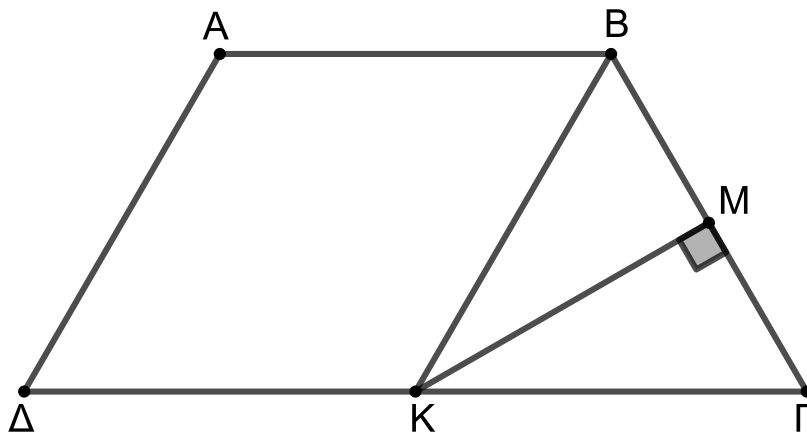
β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο  $ΑΒΚΔ$  είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)

ii. Το σημείο  $Μ$  είναι το μέσο του  $ΒΓ$ .

(Μονάδες 7)



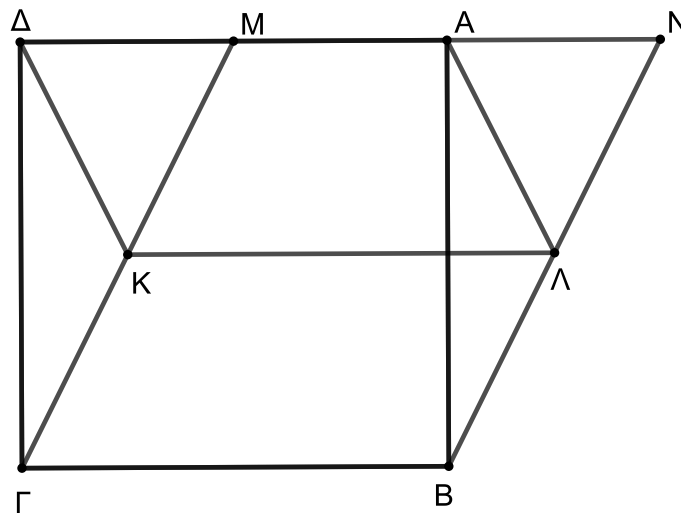
Θέμα 37129

## ΘΕΜΑ 4

Έστω τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και  $M$  το μέσο της πλευράς  $\Delta A$ . Προεκτείνουμε το τμήμα  $\Delta A$  (προς την πλευρά του  $A$ ) κατά τμήμα  $AN = \frac{A\Delta}{2}$ . Φέρουμε τα τμήματα  $\Gamma M$  και  $BN$  και θεωρούμε τα μέσα τους  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $MNB\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- β) Το τετράπλευρο  $A\Delta K\Lambda$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)
- γ) Το τετράπλευρο  $AMK\Lambda$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



Θέμα 37130

## ΘΕΜΑ 4

Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB > B\Gamma$  και  $\widehat{B} < 90^\circ$  θεωρούμε σημείο  $Z$  στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) τέτοιο ώστε  $\Gamma Z = B\Gamma$ . Αν  $E$  είναι σημείο της  $AB$ , τέτοιο ώστε  $E\Gamma = \Gamma B$ , να αποδείξετε ότι:

α) η γωνία  $BEZ$  είναι ορθή, (Μονάδες 8)

β) το τετράπλευρο  $AE\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο, (Μονάδες 8)

γ) το τετράπλευρο  $A\Gamma Z\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

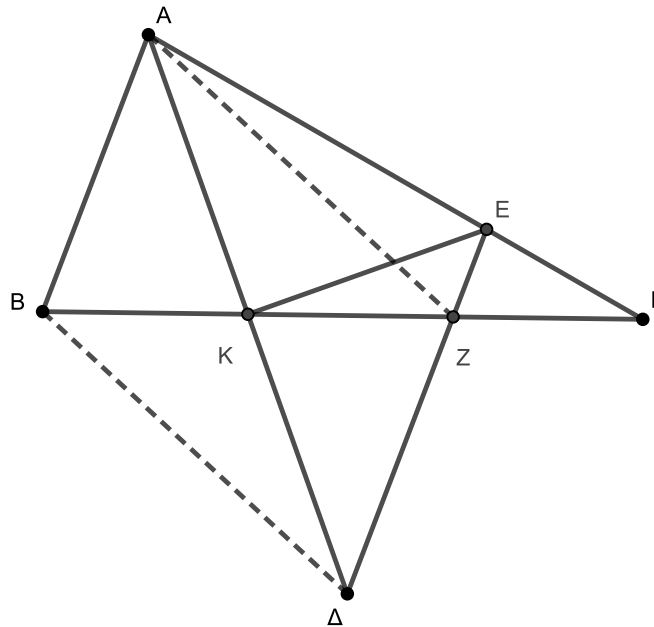
Θέμα 37131

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $AK$  διχοτόμο της γωνίας  $A$ . Στην προέκταση της  $AK$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AK = K\Delta$ . Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει τις  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  στα  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $AED$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- β) Η  $EK$  είναι μεσοκάθετος της  $AD$ . (Μονάδες 6)
- γ) Τα τρίγωνα  $AKB$  και  $K\Delta Z$  είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- δ) Το τετράπλευρο  $AZ\Delta B$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



Θέμα 37132

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην προέκταση του ύψους του  $AK$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AK = K\Delta$ .

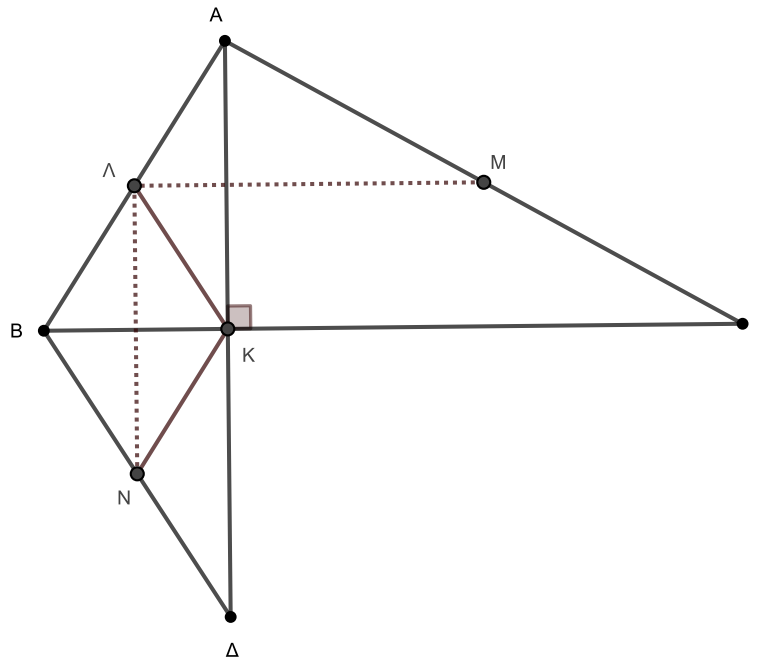
Έστω  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$  τα μέσα των πλευρών  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο  $B\Lambda K N$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 9)

γ)  $\Lambda M \perp \Lambda N$  (Μονάδες 9)



Θέμα 37133

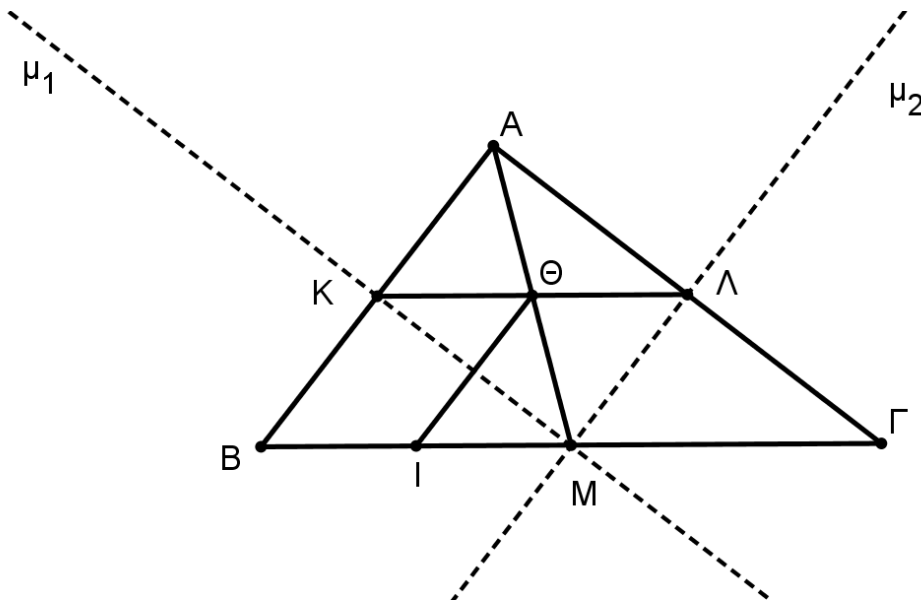
## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τις μεσοκαθέτους  $\mu_1, \mu_2$  των πλευρών του  $AB$  και  $AG$ , οι οποίες τέμνονται στο μέσο  $M$  της  $B\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ . (Μονάδες 5)
- ii. Το τετράπλευρο  $ΑΛΜΚ$  είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)
- iii.  $\Lambda\Theta = \frac{B\Gamma}{4}$ , όπου  $\Theta$  το σημείο τομής των  $AM$  και  $ΚΛ$ . (Μονάδες 6)

β) Αν  $I$  σημείο της  $B\Gamma$  τέτοιο ώστε  $BI = \frac{B\Gamma}{4}$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $ΚΘΙΒ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

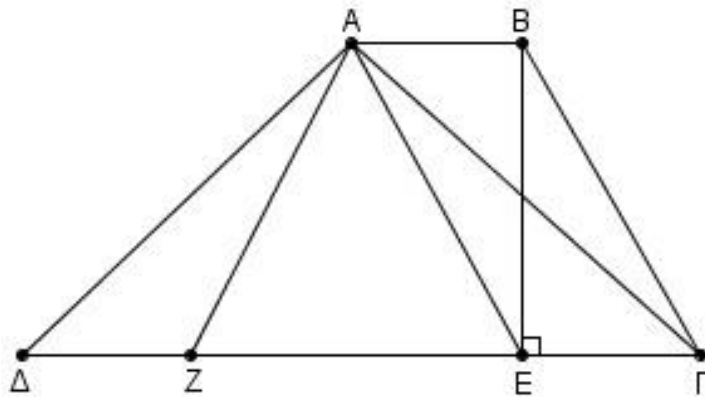


Θέμα 37134

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$ ,  $\Delta\Gamma = 4AB$  και  $B\Gamma = 2AB$ . Θεωρούμε σημείο  $Z$  της  $\Gamma\Delta$ , ώστε  $\Delta Z = AB$ . Αν η γωνία  $\Gamma$  είναι  $60^\circ$  και  $BE$  το ύψος του τραpezίου, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $AB\Gamma E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
- β) Το τρίγωνο  $ZAE$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)
- γ) Τα τρίγωνα  $\Delta AZ$  και  $\Gamma AE$  είναι ίσα. (Μονάδες 9)



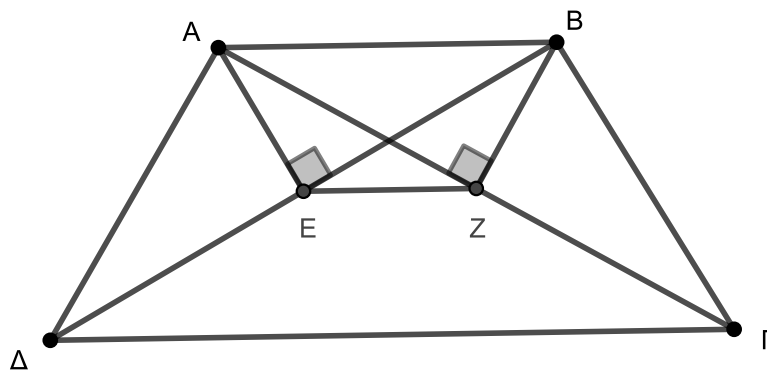
Θέμα 37135

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $A\Delta = B\Gamma = AB$ . Φέρουμε τμήματα  $AE$  και  $BZ$  κάθετα στις διαγώνιες  $B\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα σημεία  $Z$  και  $E$  είναι μέσα των διαγωνίων  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα. (Μονάδες 5)
- β)  $AE = BZ$ . (Μονάδες 8)
- γ) Το τετράπλευρο  $AEZB$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)
- δ) Η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta$ . (Μονάδες 5)



Θέμα 37136

## ΘΕΜΑ 4

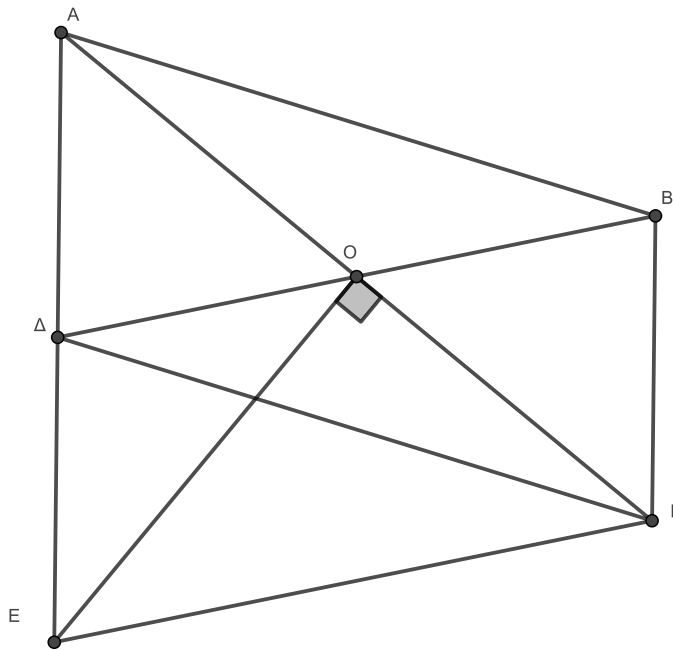
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  τέτοιο ώστε αν φέρουμε την κάθετη στην  $A\Gamma$  στο κέντρο του  $O$ , αυτή τέμνει την προέκταση της  $A\Delta$  σε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $\Delta E = A\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $A\epsilon\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

β) Το τετράπλευρο  $B\Gamma\epsilon\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ) Το τρίγωνο  $B\omicron\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)



Θέμα 37137

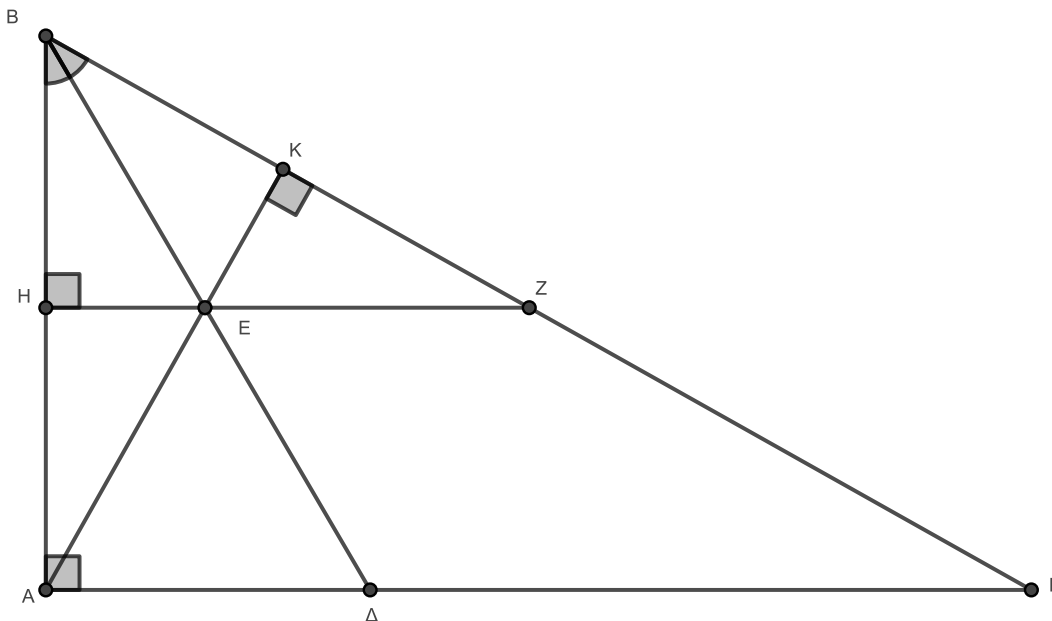
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $B\Delta$  διχοτόμο και  $AK$  ύψος, που τέμνονται στο  $E$ .  
 Η κάθετη από το  $E$  στην  $AB$  τέμνει τις  $AB$  και  $B\Gamma$  στα  $H$  και  $Z$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα  $EHA$  και  $EΚZ$  είναι ίσα. (Μονάδες 6)
- ii. το τρίγωνο  $BKH$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- iii. η  $B\Delta$  είναι κάθετη στην  $AZ$ . (Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η  $GE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Gamma$ . (Μονάδες 6)



Θέμα 37138

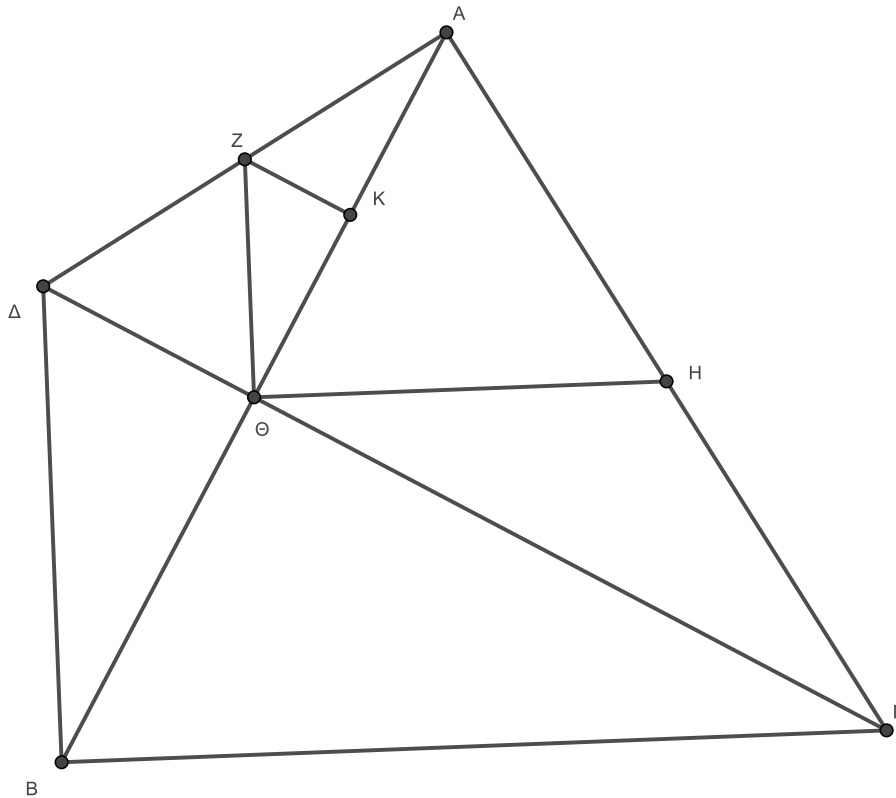
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Με βάση την  $AB$  κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο  $A\Delta B$ , εκτός του τριγώνου  $AB\Gamma$ , με γωνία  $\widehat{\Delta} = 120^\circ$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$  και  $H$  των πλευρών  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι η  $\Delta\Gamma$  είναι μεσοκάθετος του  $AB$ . (Μονάδες 8)

β) Αν η  $\Delta\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $\Theta$ , να αποδείξετε ότι η γωνία  $Z\widehat{\Theta}H$  είναι ορθή. (Μονάδες 9)

γ) Αν η  $ZK$  είναι η κάθετη στην  $AB$  από το σημείο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $ZK = \frac{A\Delta}{4}$ . (Μονάδες 8)



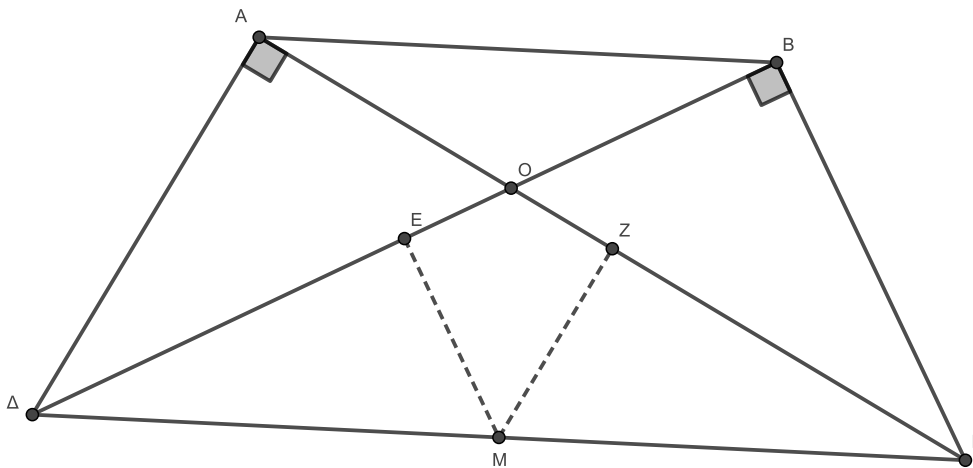
Θέμα 37139

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Delta\Gamma$ ) και  $O$  το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η  $A\Gamma$  είναι κάθετη στην  $A\Delta$  και η  $B\Delta$  είναι κάθετη στην  $B\Gamma$ . Θεωρούμε τα μέσα  $M$ ,  $E$  και  $Z$  των  $\Gamma\Delta$ ,  $B\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $ME = MZ$ . (Μονάδες 6)
- β) Η  $MZ$  είναι κάθετη στην  $A\Gamma$ . (Μονάδες 6)
- γ) Τα τρίγωνα  $M\Delta E$  και  $M\Gamma Z$  είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- δ) Η  $OM$  είναι μεσοκάθετος του  $EZ$ . (Μονάδες 6)



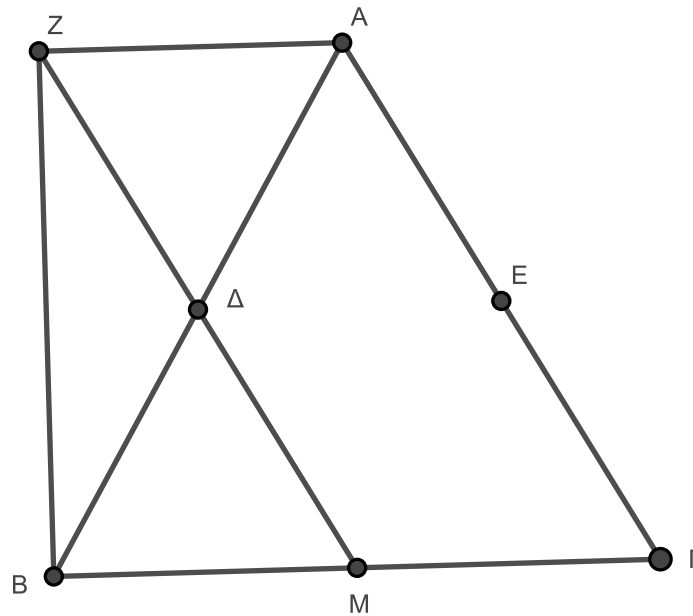
Θέμα 37140

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$  και  $M$  των  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Στην προέκταση του  $M\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) θεωρούμε τμήμα  $\Delta Z = \Delta M$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $AZ\Delta$  και  $BM\Delta$  είναι ίσα. (Μονάδες 6)
- β) Το τετράπλευρο  $ZA\Gamma M$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)
- γ) Τα τμήματα  $ZE$  και  $A\Delta$  τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται. (Μονάδες 7)
- δ) Η  $BZ$  είναι κάθετη στη  $ZA$ . (Μονάδες 6)



Θέμα 37141

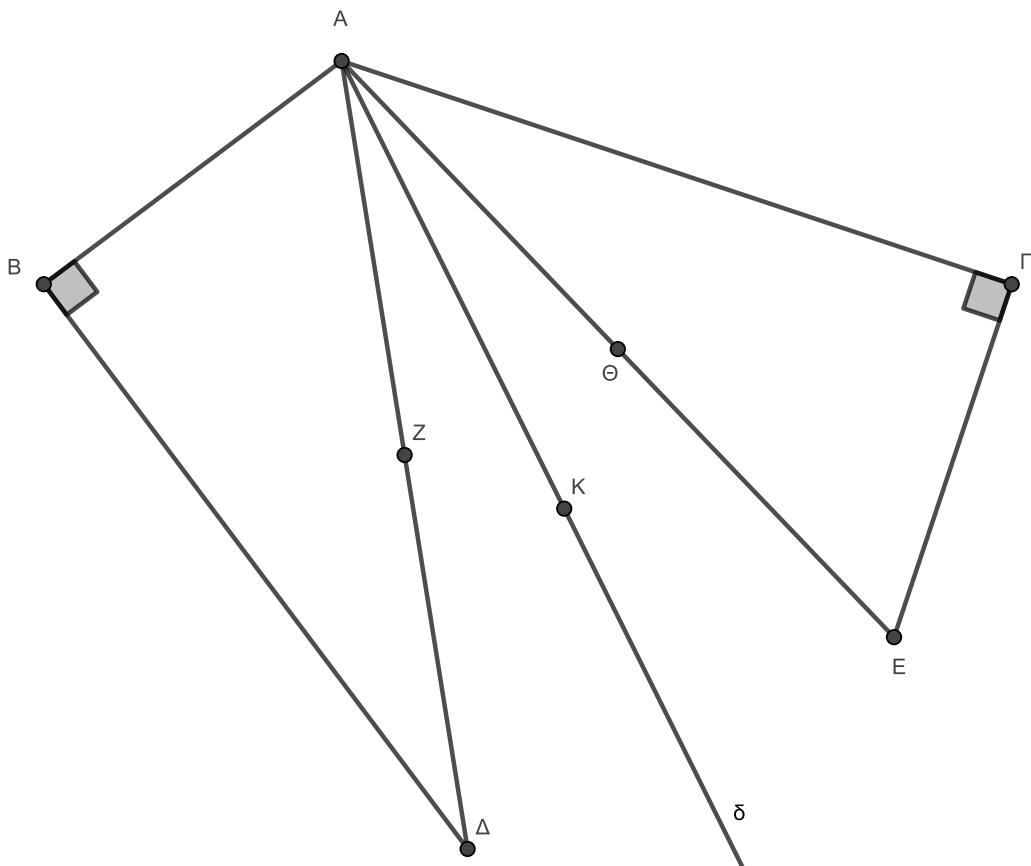
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Φέρνουμε τμήμα  $B\Delta$  κάθετο στην  $AB$  με  $B\Delta = A\Gamma$  και τμήμα  $\Gamma E$  κάθετο στην  $A\Gamma$  με  $\Gamma E = AB$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$  και  $\Theta$  των  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  καθώς και τη διχοτόμο  $A\delta$  της γωνίας  $\widehat{\Delta A E}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = A\Gamma$ . (Μονάδες 9)

β) Αν  $K$  τυχαίο σημείο της διχοτόμου  $A\delta$ , να αποδείξετε ότι ισαπέχει από τα μέσα  $Z$  και  $\Theta$ . (Μονάδες 9)

γ) Αν το  $K$  είναι σημείο της διχοτόμου  $A\delta$  τέτοιο ώστε  $KZ = AZ$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AZK\Theta$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 7)



Θέμα 37142

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Φέρνουμε τμήμα  $A\Delta$  κάθετο στην  $AB$  και τμήμα  $AE$  κάθετο στην  $A\Gamma$  με  $A\Delta = AE$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$ ,  $H$  και  $M$  των  $\Delta B$ ,  $E\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $AE\Gamma$  είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- ii. Το τρίγωνο  $ZAH$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- iii. Η  $AM$  είναι μεσοκάθετος του  $ZH$ . (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα  $A\Delta B$  και  $AE\Gamma$  έγραψε τα εξής:

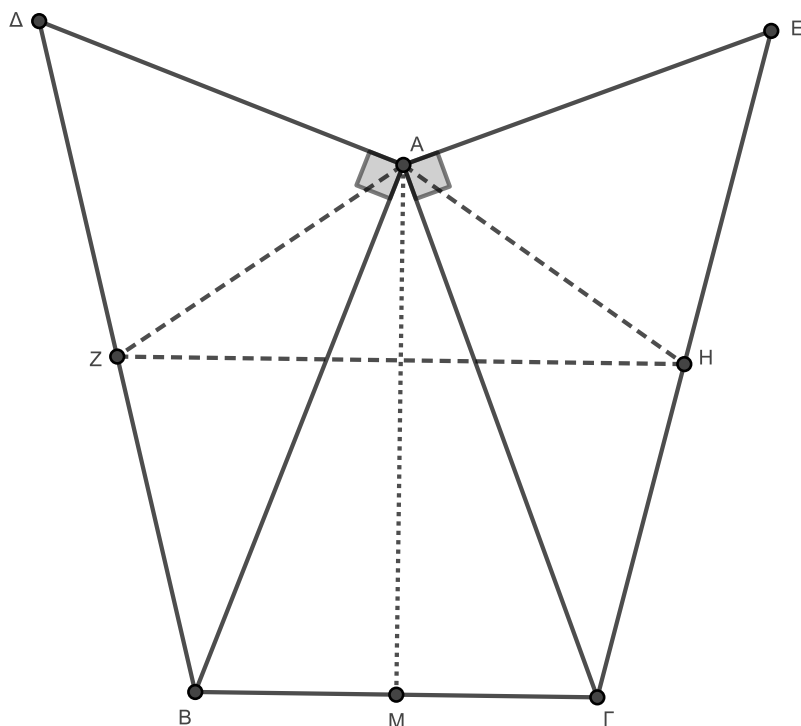
« 1.  $A\Delta = AE$  από υπόθεση

2.  $AB = A\Gamma$  πλευρές ισοσκελούς τριγώνου

3.  $\widehat{\Delta AB} = \widehat{E\Gamma A}$  ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος. Μπορείς να το εντοπίσεις; (Μονάδες 5)



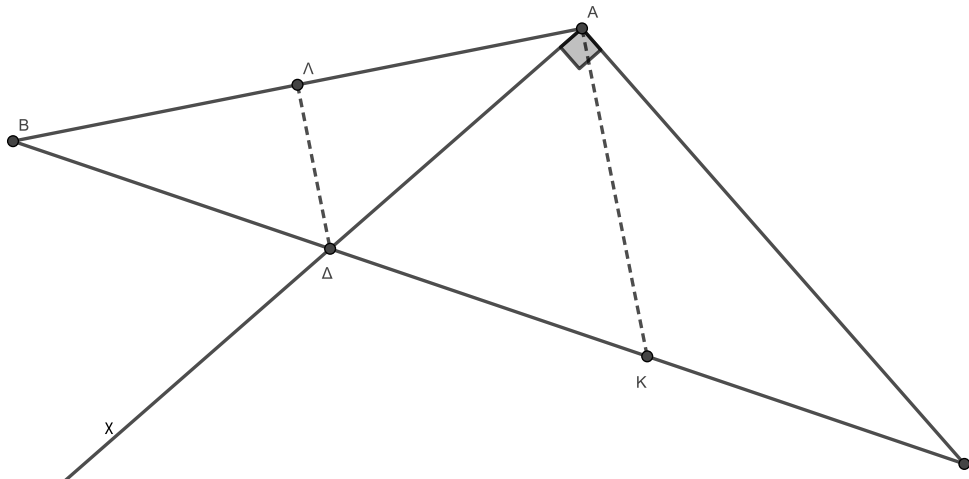
Θέμα 37156

## ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΒΑΓ με  $\hat{A} = 120^\circ$ . Φέρουμε ημιευθεία Αx κάθετη στην ΑΓ στο Α, η οποία τέμνει τη ΒΓ στο Δ. Έστω Λ το μέσο του ΑΒ και Κ το μέσο του ΔΓ.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο ΑΔΒ είναι ισοσκελές (Μονάδες 8)  
 β)  $\Delta\Gamma = 2 \cdot B\Delta$  (Μονάδες 8)  
 γ)  $\Lambda\Delta \parallel AK$  (Μονάδες 5)  
 δ)  $AK = 2 \cdot \Lambda\Delta$  (Μονάδες 4)



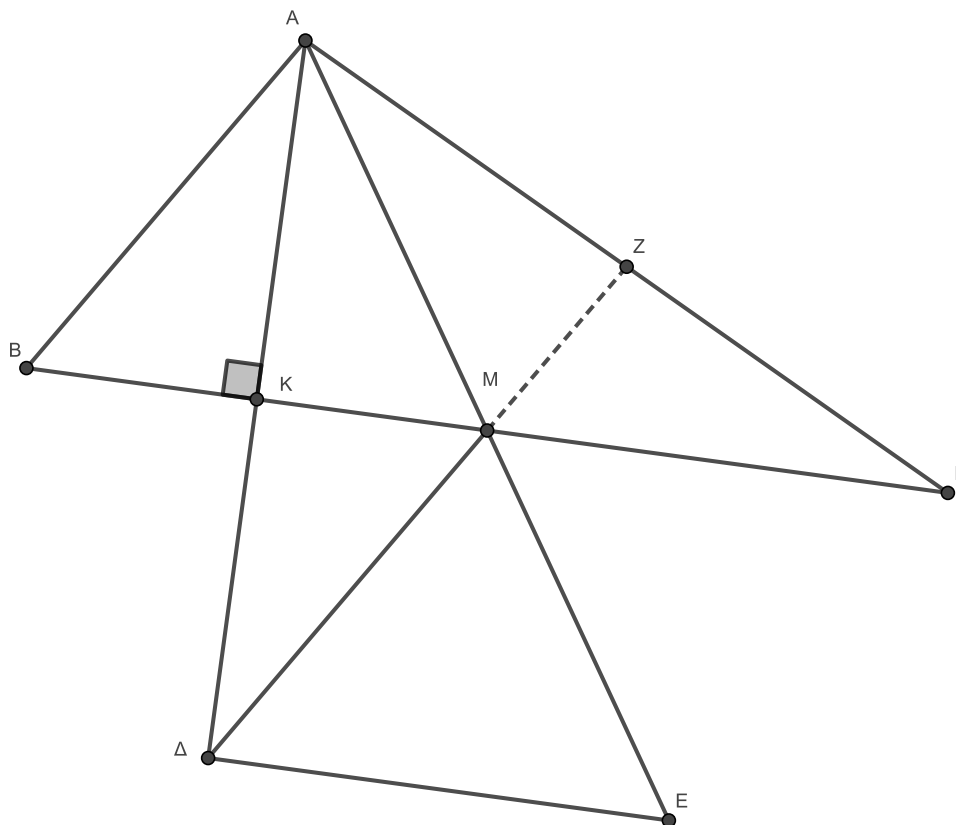
Θέμα 37157

## ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με διάμεσο  $AM$  τέτοια ώστε  $AM=AB$ . Φέρουμε το ύψος του  $AK$  και το προεκτείνουμε (προς το  $K$ ) κατά τμήμα  $K\Delta=AK$ . Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $AM$  (προς το  $M$ ) κατά τμήμα  $ME=AM$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\Delta E \perp A\Delta$  και  $\Delta E = 2KM$ . (Μονάδες 7)
- β) Το τετράπλευρο  $ABE\Gamma$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)
- γ) Το τετράπλευρο  $AB\Delta M$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 6)
- δ) Η προέκταση της  $\Delta M$  τέμνει το  $A\Gamma$  στο μέσον του  $Z$ . (Μονάδες 6)



Θέμα 37158

## ΘΕΜΑ 4

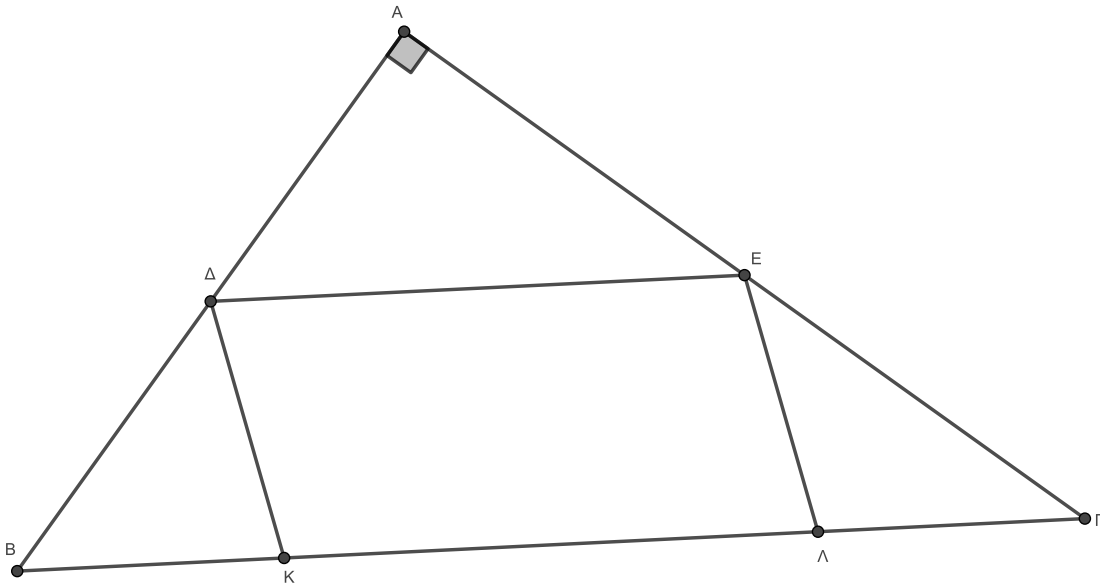
Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $ΑΒΓ$  με  $\widehat{Α} = 90^\circ$  και  $\Delta$  και  $Ε$  τα μέσα των  $ΑΒ$  και  $ΑΓ$  αντίστοιχα. Στο τμήμα  $ΒΓ$  θεωρούμε σημεία  $Κ$  και  $\Lambda$  ώστε  $\Delta K = KB$  και  $Ε\Lambda = \Lambda\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Delta\widehat{Κ}\Lambda = 2 \cdot \widehat{Β}$  και  $Ε\widehat{\Lambda}Κ = 2 \cdot \widehat{\Gamma}$ . (Μονάδες 10)

β) Το τετράπλευρο  $\Delta Ε\Lambda Κ$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 9)

γ)  $\Delta Ε = 2 \cdot \Delta Κ$ . (Μονάδες 6)



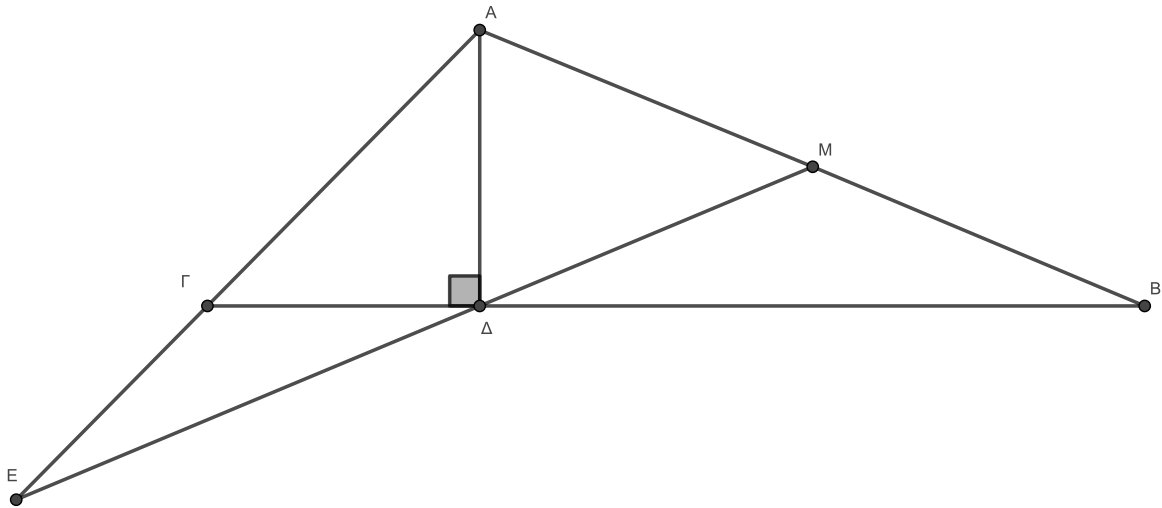
Θέμα 37159

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB > A\Gamma$ ),  $A\Delta$  το ύψος του και  $M$  το μέσο του  $AB$ . Η προέκταση της  $M\Delta$  τέμνει την προέκταση της  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$  ώστε  $\Gamma\Delta = \Gamma E$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\widehat{B} = \widehat{E}$ . (Μονάδες 8)
- β)  $\widehat{\Gamma} = 2 \cdot \widehat{B} = \widehat{A\hat{M}\Delta}$ . (Μονάδες 10)
- γ)  $\Gamma E < A\Gamma$ . (Μονάδες 7)



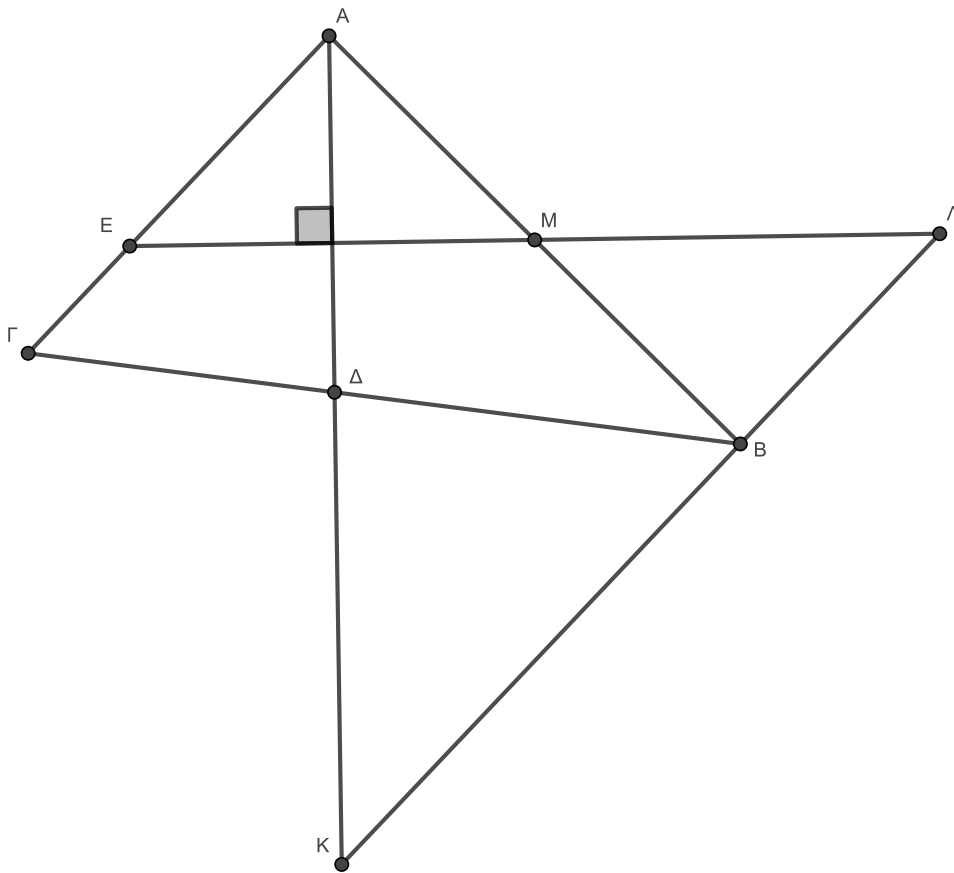
Θέμα 37160

ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $AD$  η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  και  $M$  το μέσον της  $AB$ . Η κάθετη από το  $M$  στην  $AD$  τέμνει το  $A\Gamma$  στο  $E$ . Η παράλληλη από το  $B$  στο  $A\Gamma$  τέμνει την προέκταση της  $AD$  στο  $K$  και την προέκταση της  $EM$  στο  $\Lambda$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα  $AEM$ ,  $MB\Lambda$  και  $ABK$  είναι ισοσκελή. (Μονάδες 15)  
 β) Το τετράπλευρο  $A\Lambda B E$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



Θέμα 37161

## ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ) και  $A\Delta$  διάμεσος. Στο τμήμα  $A\Delta$  θεωρούμε τυχαίο σημείο  $K$  από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα  $KZ$  και  $KE$  κάθετα στις  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $KB\Gamma$  και  $KZE$  είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $Z\epsilon\Gamma B$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής στην πορεία της λύσης του έδωσε το εξής επιχειρήμα:

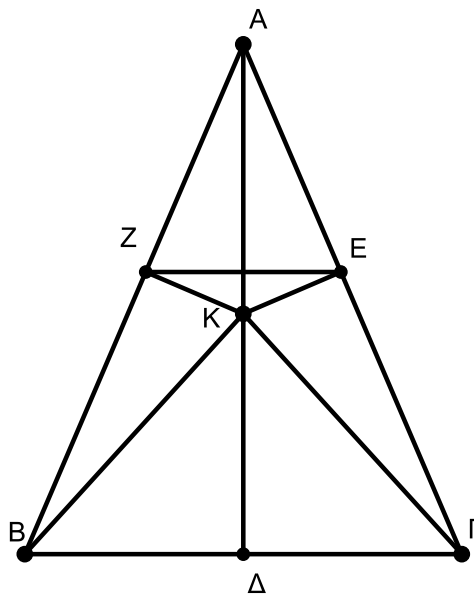
«Το τμήμα  $A\Delta$  είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου  $AB\Gamma$  και μεσοκάθετος του  $B\Gamma$ . Οπότε και το τρίγωνο  $BK\Gamma$  είναι ισοσκελές.

Τα τρίγωνα  $ABK$ ,  $AGK$  έχουν:

1.  $BK = K\Gamma$
2.  $\hat{B}AK = \hat{G}AK$  επειδή  $AK$  διχοτόμος της  $\hat{A}$ .
3.  $\hat{A}BK = \hat{A}GK$  ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»

Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία –Πλευρά- Γωνία διατηρώντας τις πλευρές  $BK$  και  $K\Gamma$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 37162

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και το ύψος του  $AH$ . Αν  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των  $AB, A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο  $\Delta EZH$  είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες  $\widehat{H\Delta Z}$  και  $\widehat{H\hat{E}Z}$  είναι ίσες . (Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες  $\widehat{E\hat{\Delta}Z}$  και  $\widehat{E\hat{H}Z}$  είναι ίσες. (Μονάδες 9)

Θέμα 37163

## ΘΕΜΑ 4

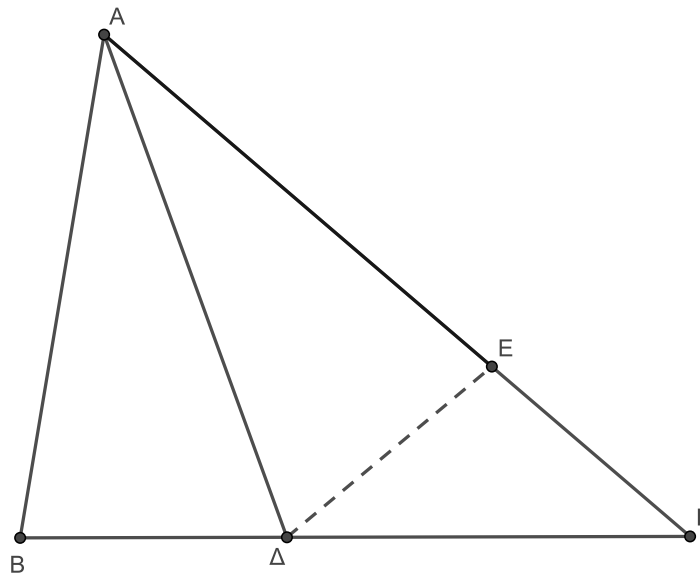
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$ . Στην πλευρά  $A\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $AE = AB$ .

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Delta E$  είναι ίσα. (Μονάδες 7)

β) η ευθεία  $A\Delta$  είναι μεσοκάθετος του τμήματος  $BE$ . (Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή  $B$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  τέμνει την  $A\Delta$  στο  $H$  τότε η ευθεία  $EH$  είναι κάθετη στην  $AB$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 37164

ΘΕΜΑ 4

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Φέρουμε  $\Gamma\Delta \perp B\Gamma$  με  $\Gamma\Delta = AB$  ( $A, \Delta$  εκατέρωθεν της  $B\Gamma$ ).

Να αποδείξετε ότι:

α)  $AM \parallel \Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 6)

β) η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $M\hat{A}\Gamma$ .

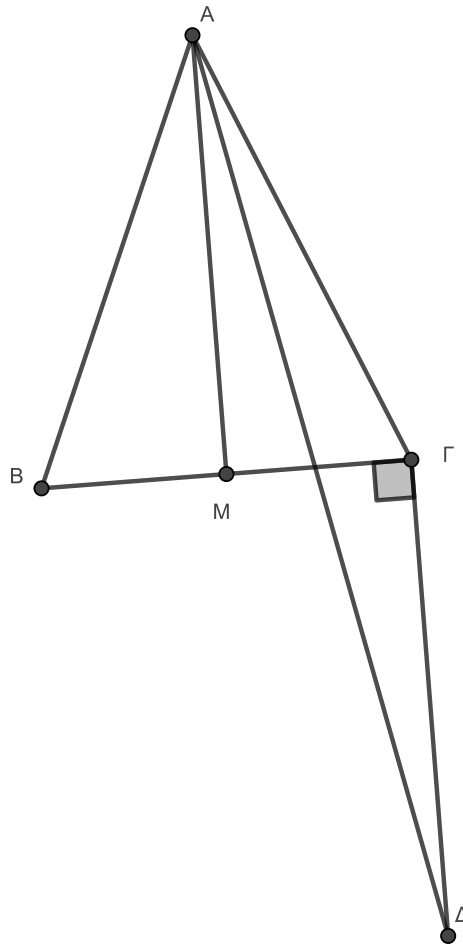
(Μονάδες 7)

γ)  $\Delta\hat{A}\Gamma = 45^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$ .

(Μονάδες 7)

δ)  $A\Delta < 2 AB$ .

(Μονάδες 5)



Θέμα 37165

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Από το  $B$  φέρουμε κάθετη στην διχοτόμο  $AM$  της γωνίας  $A$ , η οποία τέμνει την  $AM$  στο  $H$  και την  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ . Στην προέκταση της  $AH$  (προς το  $H$ ) θεωρούμε σημείο  $Z$  τέτοιο ώστε  $AH = HZ$  και έστω  $\Theta$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι

α) το τετράπλευρο  $ABZ\Delta$  είναι ρόμβος.

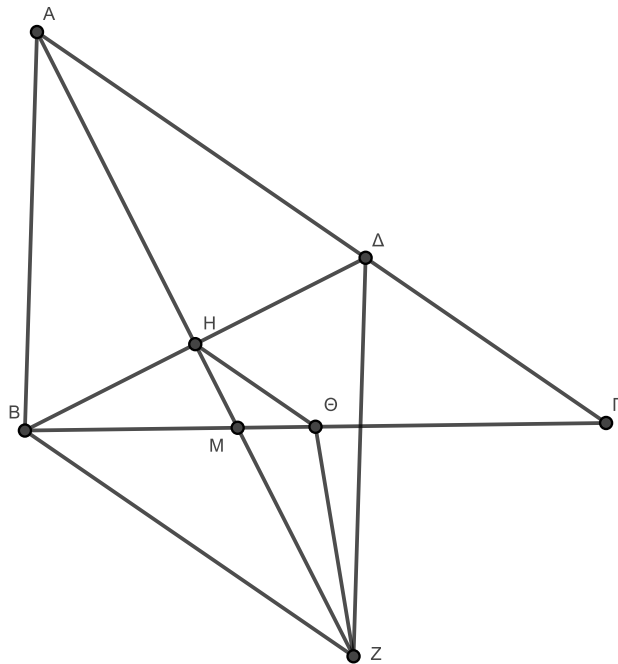
(Μονάδες 9)

β)  $H\Theta \parallel BZ$ .

(Μονάδες 9)

γ)  $H\Theta = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

(Μονάδες 7)



Θέμα 37166

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών Α, Β, Γ, Δ και Ε και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό Ε ισαπέχει από τα χωριά Β, Γ και επίσης από τα χωριά Α και Δ.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η απόσταση των χωριών Α και Β είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ.

(Μονάδες 5)

- ii. αν οι δρόμοι ΑΒ και ΓΔ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν.

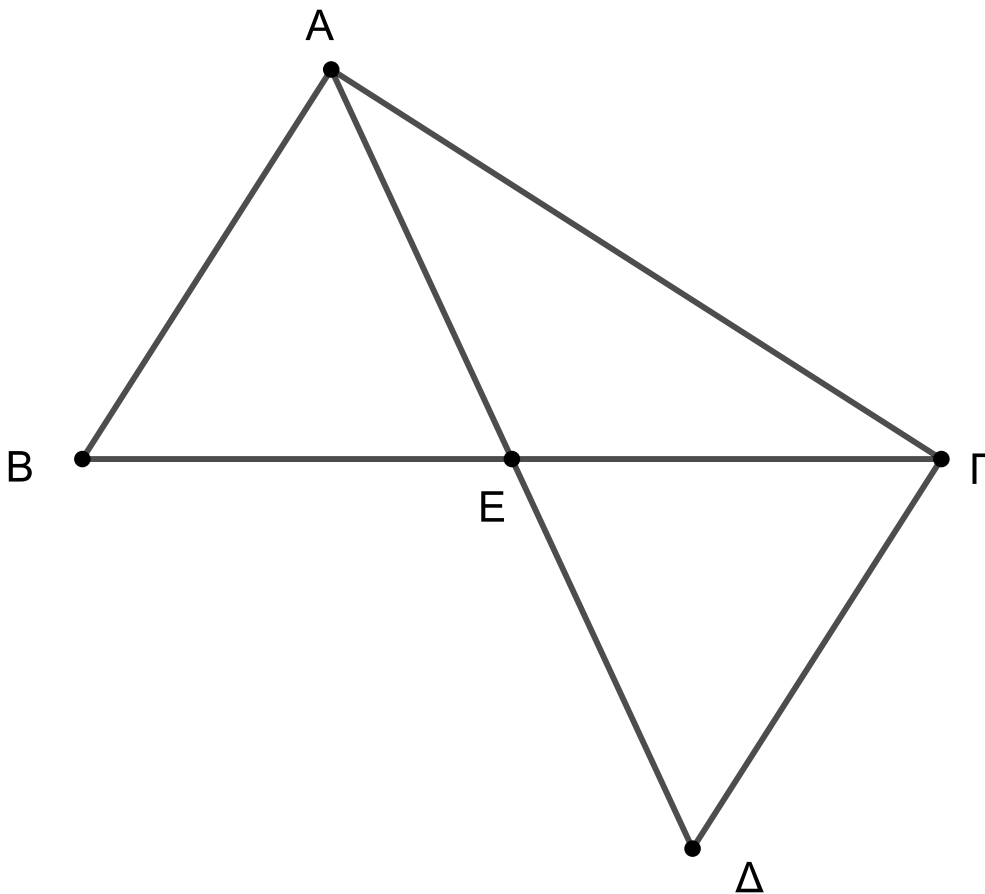
(Μονάδες 5)

- iii. τα χωριά Β και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο ΑΔ.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου ΑΓ που ισαπέχει από τα χωριά Α και Δ.

(Μονάδες 7)



Θέμα 37167

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB > A\Delta$  και οι διχοτόμοι των γωνιών του  $AP$ ,  $BE$ ,  $\Gamma\Sigma$  και  $\Delta T$  (όπου  $P, E$  στην  $\Delta\Gamma$  και  $\Sigma, T$  στην  $AB$ ) τέμνονται στα σημεία  $K, \Lambda, M$  και  $N$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

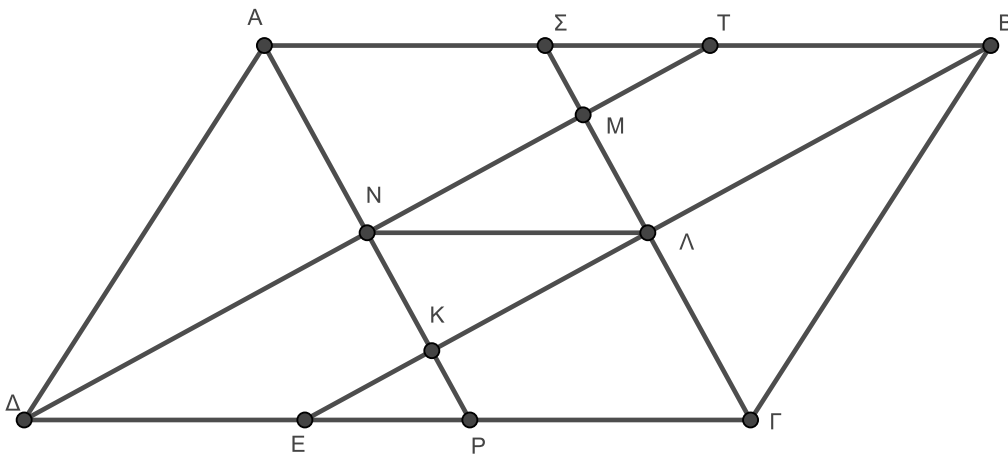
Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο  $\Delta EBT$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο  $K\Lambda MN$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

γ)  $\Lambda N \parallel AB$  (Μονάδες 5)

δ)  $\Lambda N = AB - A\Delta$  (Μονάδες 5)



Θέμα 37823

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A\Gamma=B\Gamma$ ). Η μεσοκάθετη  $\varepsilon$  της  $A\Gamma$  τέμνει την προέκταση της  $AB$  (προς το μέρος του  $B$ ) στο σημείο  $M$  και την  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Στην προέκταση της  $M\Gamma$  (προς το μέρος του  $\Gamma$ ) παίρνουμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $\Gamma E=BM$ .

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AM\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

β) Να δειχτεί ότι τα τρίγωνα  $A\Gamma E$  και  $\Gamma B M$  είναι ίσα. (Μονάδες 10)

γ) Να δειχτεί ότι το τρίγωνο  $A M E$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 7)

