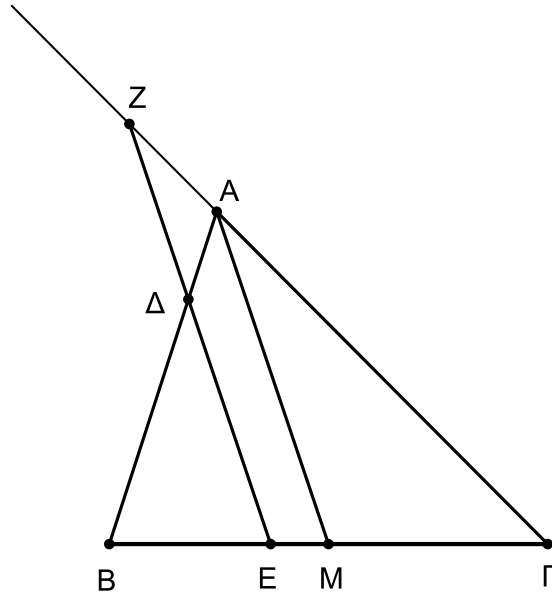


## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Θεωρούμε ΑΜ τη διάμεσό του και Ε τυχαίο σημείο του τμήματος ΒΜ. Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΜ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ζ.



α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας:

i.  $\frac{\Delta E}{\dots} = \frac{\dots}{BM} = \frac{B\Delta}{\dots}$

ii.  $\frac{\dots}{AM} = \frac{\Gamma E}{\dots} = \frac{\dots}{\Gamma A}$

(Μονάδες 12)

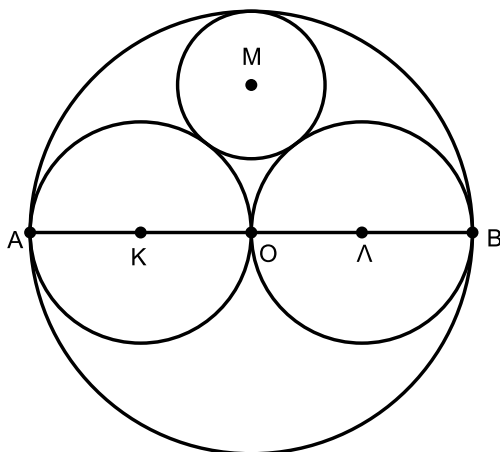
β) Να αποδείξετε ότι  $\Delta E + EZ = 2AM$  για οποιαδήποτε θέση του Ε στο ΒΜ.

(Μονάδες 13)

Θέμα 14500

ΘΕΜΑ 4

Δύο ίσοι κύκλοι  $(K,R)$  και  $(\Lambda,R)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $O$ . Ένας τρίτος κύκλος  $(M,\rho)$  εφάπτεται εξωτερικά με τους δύο κύκλους κέντρων  $K$  και  $\Lambda$ . Με κέντρο το σημείο  $O$  και ακτίνα  $2R$  γράφουμε κύκλο, ο οποίος εφάπτεται εξωτερικά των 3 παραπάνω κύκλων, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Στον παρακάτω πίνακα, στη στήλη Α είναι οι διάκεντροι  $K\Lambda$ ,  $\Lambda M$  και  $OM$  των κύκλων με κέντρα  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$  και  $O$  και στη στήλη Β τα μήκη των διακεντρων αυτών. Να αντιστοιχίσετε τα στοιχεία της στήλης Α με τα αντίστοιχα της στήλης Β, γράφοντας στην κόλλα σας μόνο τις αντιστοιχίσεις. (Μονάδες 06)

Στήλη Α	Στήλη Β
Διάκεντρος	Μήκος
1. $K\Lambda$	i. $R$
2. $\Lambda M$	ii. $2R$
3. $OM$	iii. $R+\rho$
	iv. $2R-\rho$

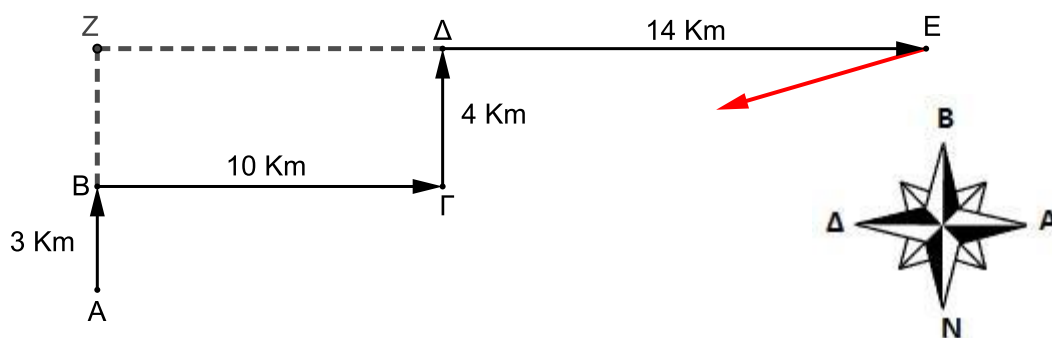
β)

- i. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $MK\Lambda$  είναι ισοσκελές και ότι το τμήμα  $MO$  είναι το ύψος προς τη βάση του. (Μονάδες 06)
- ii. Να βρείτε την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου κέντρου  $M$  ως συνάρτηση του  $R$ , όπου  $R$  η ακτίνα των κύκλων κέντρων  $K$  και  $\Lambda$ . (Μονάδες 13)

Θέμα 14533

## ΘΕΜΑ 4

Δύο κινητά βρίσκονται στο σημείο Α και σκοπεύουν να μεταβούν στο σημείο Ε, που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ένα κινητό ξεκινάει από ένα σημείο Α και κινείται βόρεια 3 χιλιόμετρα, κατόπιν συνεχίζει 10 χιλιόμετρα ανατολικά, στη συνέχεια 4 χιλιόμετρα βόρεια και τέλος 14 χιλιόμετρα ανατολικά καταλήγοντας στο σημείο Ε. Το δεύτερο κινητό ξεκινάει από το σημείο Α κινείται βόρεια μέχρι το σημείο Ζ και συνεχίζει ανατολικά μέχρι το σημείο Ε. Όταν συναντιούνται στο σημείο Ε επιστρέφουν μαζί στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα.



α)

- i. Πόσα χιλιόμετρα διάνυσε το κάθε κινητό από το σημείο Α στο σημείο Ε με τον τρόπο που κινήθηκε; (Μονάδες 05)
- ii. Να βρείτε την απόσταση ΑΕ που διάνυσαν τα δύο κινητά κατά την επιστροφή από το σημείο Ε στο σημείο Α κινούμενα ευθύγραμμα. (Μονάδες 12)

β) Επιστρέφοντας τα δύο κινητά από το σημείο Ε στο σημείο Α, θα περάσουν από το σημείο Γ; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 08)

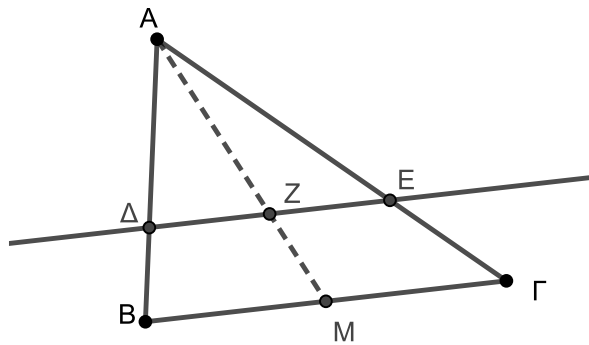
Θέμα 14534

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB=6$  και  $A\Gamma=9$ .  $AM$  είναι η διάμεσος του τριγώνου και το σημείο  $Z$  εσωτερικό στην  $AM$  ώστε να σχηματίζει λόγο  $\frac{AZ}{AM} = \frac{2}{3}$ . Από το σημείο  $Z$  φέρουμε ευθεία παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$ , που τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι :  $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$  και  $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{2}{3}$ . (Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων  $A\Delta$  και  $AE$ . (Μονάδες 10)



Θέμα 14535

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$AB = 9$ ,  $A\Gamma = 15$  και  $\hat{A} = 48^\circ$ ,  $Z\Delta = 12$ ,  $ZE = 20$  και  $\hat{Z} = 48^\circ$ .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

- i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.
- ii. Να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 12)

Θέμα 14536

## ΘΕΜΑ 2

Για δύο ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $E\Delta Z$  ( $E\Delta = EZ$ ) γνωρίζουμε ότι:

$$\hat{A} = 48^\circ, \hat{Z} = 66^\circ \text{ και } AB = 3 \cdot E\Delta.$$

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $E\Delta Z$  είναι όμοια. (Μονάδες 13)

β)

- i. Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των δυο τριγώνων
- ii. Να βρείτε το λόγο των βάσεων των δυο τριγώνων.

(Μονάδες 12)

Θέμα 14537

## ΘΕΜΑ 2

Δίνονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ για τα οποία γνωρίζουμε ότι:

$$\hat{A} = 48^\circ, \hat{B} = 53^\circ, \hat{E} = 79^\circ \text{ και } \hat{Z} = 48^\circ.$$

α) Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β)

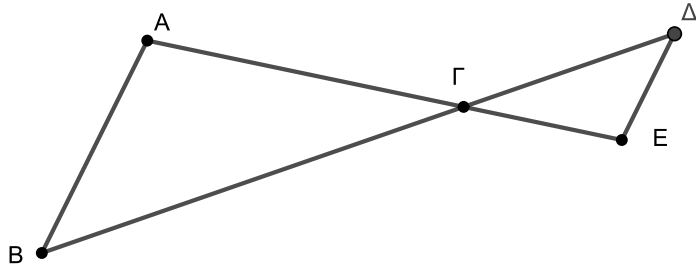
i. Ποιες είναι οι ομόλογες πλευρές των δύο τριγώνων; (Μονάδες 9)

ii. Να γράψετε την ισότητα των λόγων των ομόλογων πλευρών των δυο τριγώνων.

(Μονάδες 6)

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα τμήματα  $AB$  και  $\Delta E$  είναι παράλληλα και τα τμήματα  $A\Gamma$  και  $\Gamma E$  είναι τέτοια, ώστε  $A\Gamma = 2\Gamma E$ .



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $E\Delta\Gamma$  είναι όμοια.

(Μονάδες 13)

β)

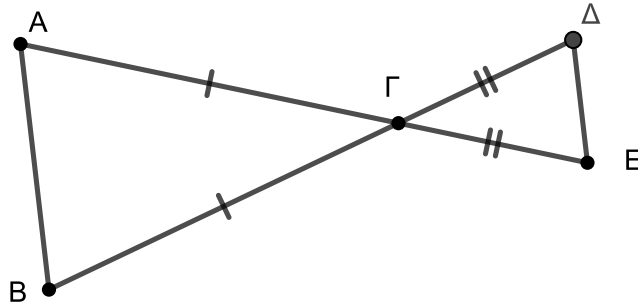
- i. Να γράψετε τους λόγους των ομόλογων πλευρών των δύο τριγώνων.
- ii. Ποιος είναι ο λόγος ομοιότητας των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

Θέμα 14546

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ και ΒΔ τέμνονται στο Γ, τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ που σχηματίζονται είναι ισοσκελή και οι βάσεις τους ΑΒ και ΔΕ είναι τέτοιες, ώστε  $AB = 2 \cdot \Delta E$ .



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΑΒ και ΓΔΕ είναι όμοια.

(Μονάδες 13)

β)

- i. Να γράψετε την ισότητα των λόγων που προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων του ερωτήματος α).
- ii. Ποια σχέση συνδέει τις πλευρές ΑΓ και ΓΕ των δύο τριγώνων;

(Μονάδες 12)

Θέμα 14549

ΘΕΜΑ 2

Τα μήκη των πλευρών  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι :  $\alpha=7$ ,  $\beta=3$  και  $\gamma=5$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς  $AB$  στην πλευρά  $A\Gamma$  και να υπολογίσετε το μήκος της. (Μονάδες 13)

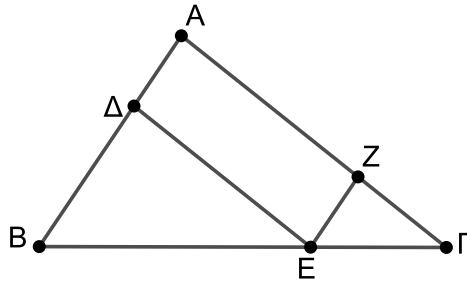
Θέμα 14579

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  των πλευρών του  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, ώστε η  $\Delta E$  να είναι παράλληλη στην  $A\Gamma$ . Επίσης  $AB = 3A\Delta$ .

α) Να βρείτε τους λόγους  $\frac{B\Delta}{A\Delta}$  και  $\frac{BE}{E\Gamma}$ . (Μονάδες 15)

β) Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι  $A\Gamma = 3,9$  και  $\Gamma Z = 1,3$  να αποδείξετε ότι η  $ZE$  είναι παράλληλη της  $AB$ . (Μονάδες 10)



Θέμα 14600

ΘΕΜΑ 3

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του αν οι πλευρές του έχουν μήκη 6, 5,  $\sqrt{37}$ .

( Μονάδες 10 )

β) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ=6, ΑΒ=5 και ΑΓ=  $\sqrt{37}$ . Να βρείτε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στην πλευρά ΒΓ.

( Μονάδες 15 )

Θέμα 14620

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με υποτείνουσα  $B\Gamma=20$  και αντίστοιχο ύψος  $A\Delta=8$ .

Αν  $B\Delta > \Delta\Gamma$  τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος της  $\Delta\Gamma$ .

(Μονάδες 11)

β) Αν  $\Delta\Gamma=4$ , να βρείτε τα μήκη των  $AB$  και  $A\Gamma$

(Μονάδες 14)

Θέμα 14627

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με πλευρές  $AB=3\sqrt{2}$  και  $A\Delta=3$ . Αν  $AE$  και  $\Gamma Z$  είναι ύψη των τριγώνων  $AB\Delta$  και  $\Gamma B\Delta$  αντιστοίχως, τότε

α) Να υπολογίσετε την διαγώνιο  $B\Delta$  του ορθογωνίου. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι  $\Delta E = ZB = \sqrt{3}$ . (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι  $ZE = \Delta E = BZ$  (Μονάδες 7)

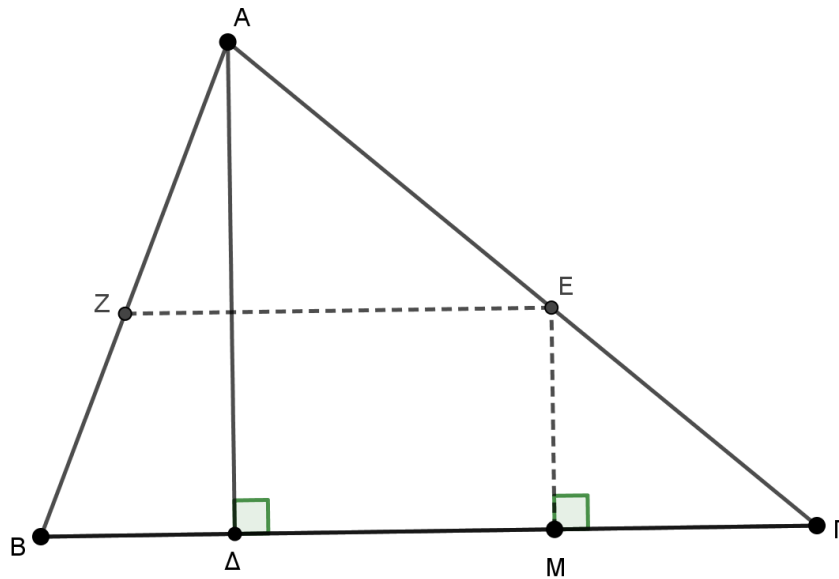
Θέμα 15830

## ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου. Η κάθετος στην πλευρά ΒΓ σε ένα άλλο σημείο της Μ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α)  $\frac{ZA}{ZB} = \frac{EA}{EG}$ . (Μονάδες 10)

β)  $\frac{ZA}{ZB} = \frac{MA}{MG}$ . (Μονάδες 15)



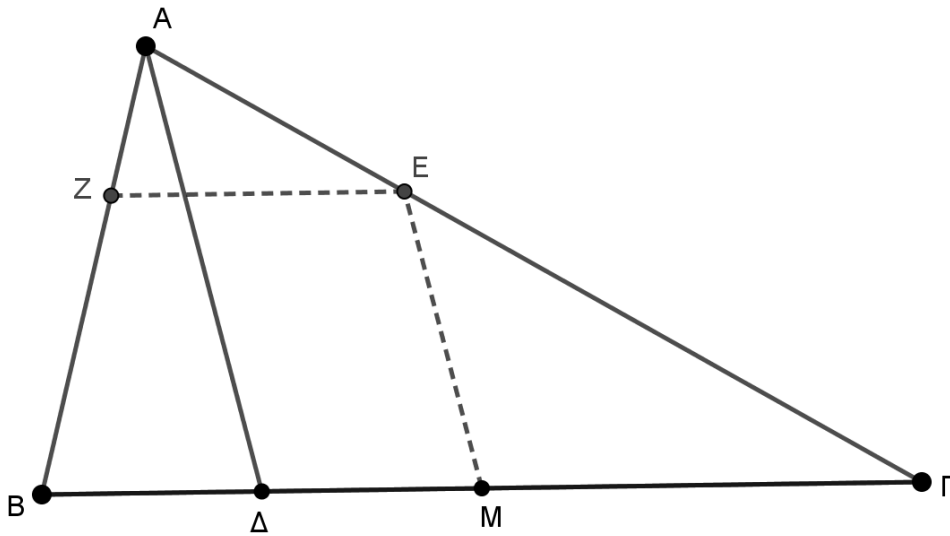
Θέμα 15831

## ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, το Μ είναι μέσο της πλευράς ΒΓ και το Δ είναι το μέσο του ΜΒ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Ε φέρνουμε παράλληλη στην ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α)  $\frac{EA}{EG} = \frac{1}{2}$ . (Μονάδες 15)

β)  $\frac{ZA}{ZB} = \frac{1}{2}$ . (Μονάδες 10)



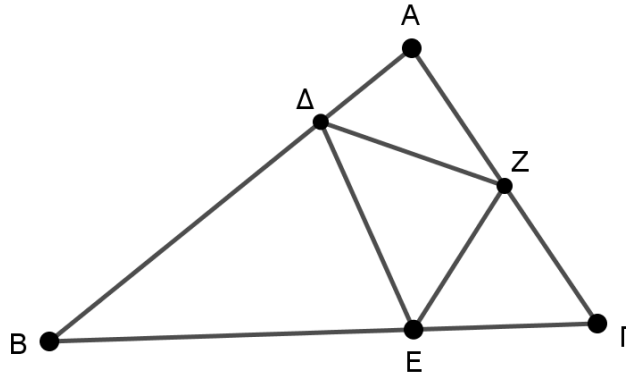
Θέμα 15978

## ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, τα Δ, Ε, Ζ, είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα, ώστε:  $AD = \frac{1}{4}AB$ ,  $BE = \frac{2}{3}BG$  και  $GZ = \frac{1}{2}AG$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $(A\Delta Z) = \frac{1}{8} (AB\Gamma)$ ,  $(BE\Delta) = \frac{1}{2} (AB\Gamma)$ ,  $(\Gamma EZ) = \frac{1}{6} (AB\Gamma)$ . (Μονάδες 15)

β)  $(\Delta EZ) = \frac{5}{24} (AB\Gamma)$ . (Μονάδες 10)



Θέμα 15979

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB=AG=5$  και  $\hat{A} = 120^\circ$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $BΓ = 5\sqrt{3}$ . (Μονάδες 13)

β)  $(ABΓ) = \frac{25\sqrt{3}}{4}$ . (Μονάδες 12)

Θέμα 16080

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = 5$ ,  $BΓ = \sqrt{41}$  και  $AΓ = 8$ .

α) Να σχεδιάσετε την προβολή ΑΔ, της ΑΒ στην ΑΓ και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 13)

β) Αν  $AΔ = 3$ , να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΒΔ.

(Μονάδες 12)

Θέμα 16086

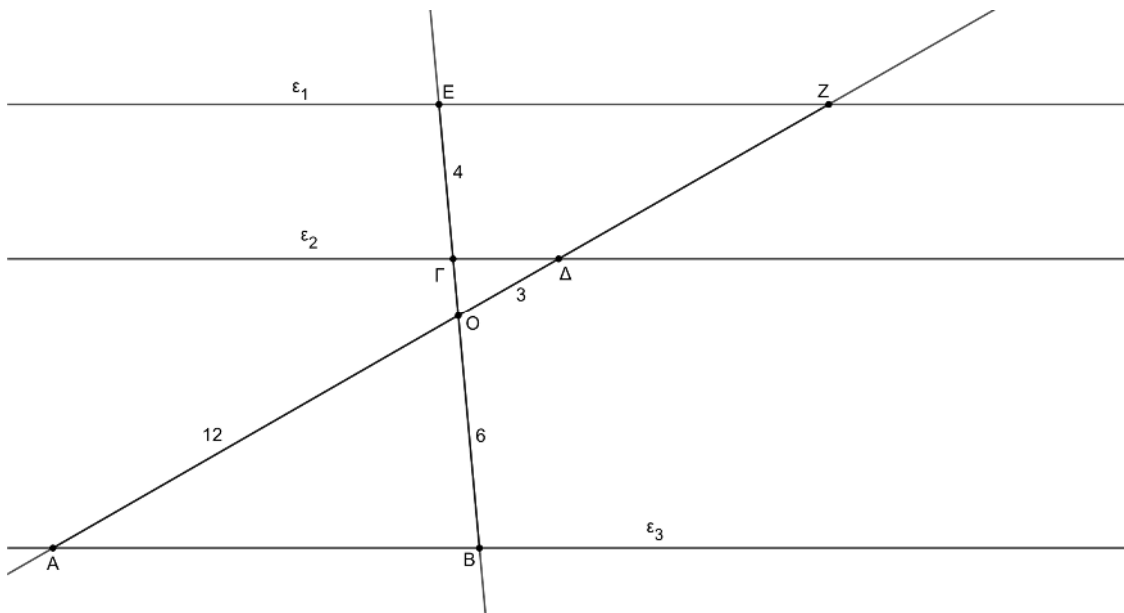
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  και  $\epsilon_3$  είναι παράλληλες. Δίνονται ότι  $GE = 4$ ,  $OD = 3$ ,  $OA = 12$ ,  $OB = 6$ .

α) Να υπολογίσετε τα τμήματα  $OG$  και  $DZ$ . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $OEZ$  και  $OBA$  είναι όμοια. (Μονάδες 09)

γ) Αν  $OG = 1.5$  και  $DZ = 8$ , να υπολογίσετε τον λόγο  $\frac{EZ}{AB}$ . (Μονάδες 06)

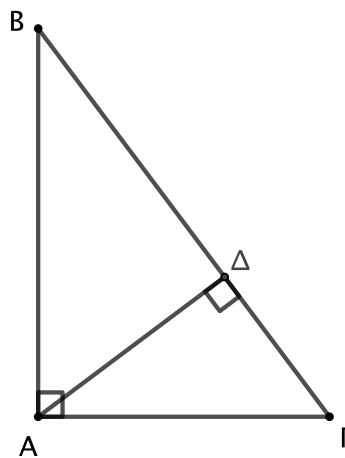


Θέμα 16097

## ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν ως **Σωστή (Σ)** ή **Λανθασμένη (Λ)**, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε καθεμιά από αυτές το γράμμα Σ αν η πρόταση είναι Σωστή, ή το γράμμα Λ αν αυτή είναι Λάθος.

- i. Κάθε ευθεία που είναι παράλληλη με μία από τις πλευρές ενός τριγώνου χωρίζει τις δύο άλλες πλευρές σε μέρη ανάλογα.
- ii. Δύο ισοσκελή τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
- iii. Στο σχήμα, η προβολή της πλευράς AB στην υποτεινούσα ΒΓ είναι το τμήμα ΓΔ.



- iv. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.
- v. Ο εγγεγραμμένος και ο περιγεγραμμένος κύκλος ενός κανονικού πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

(Μονάδες 15)

Θέμα 16099

ΘΕΜΑ 2

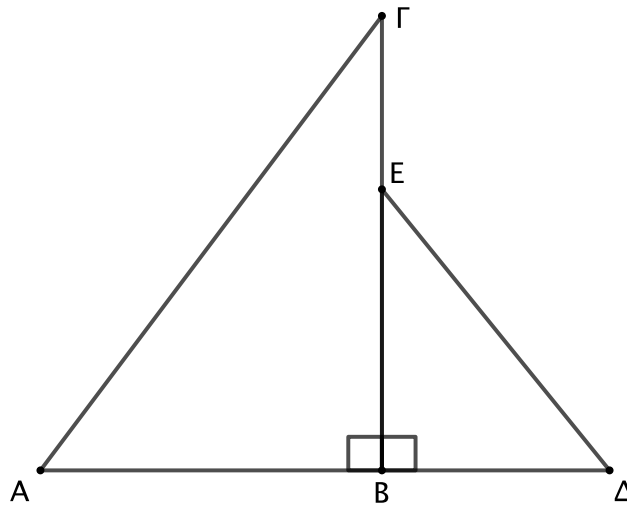
Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι  $\hat{A} = \hat{\Delta}$ ,  $ΑΓ = 36$ ,  $ΒΔ = 16$  και  $ΕΔ = 24$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ΑΒΓ$  και  $ΔΒΕ$  είναι όμοια.

(Μονάδες 15)

β) Να υπολογίσετε την πλευρά  $ΑΒ$ .

(Μονάδες 10)



Θέμα 16100

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ότι  $AE = 5$ ,  $AG = 4$ ,  $EG = 2$ ,  $DE = 6$ ,  $BE = 15$  και  $BD = 12$ .

α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{BD}{AG}, \frac{DE}{EG}, \frac{BE}{AE}$$

(Μονάδες 9)

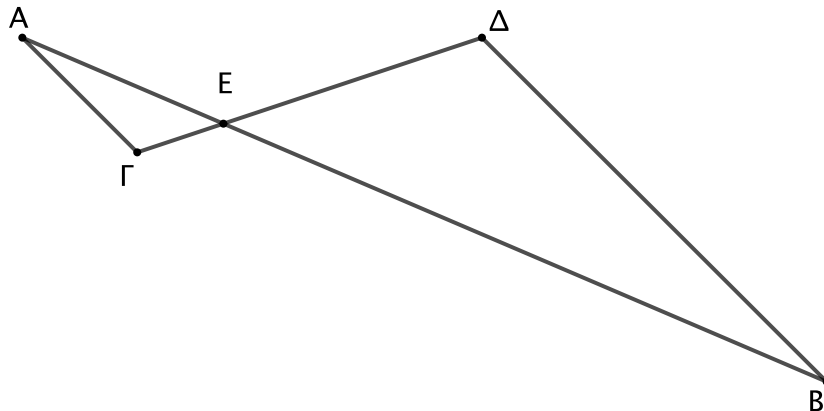
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AEG$  και  $BED$  είναι όμοια.

(Μονάδες 8)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων  $AEG$  και  $BED$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\hat{A} = \dots, \quad \hat{G} = \dots, \quad \angle AEG = \dots$$

(Μονάδες 8)



Θέμα 16101

ΘΕΜΑ 2

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $AB = 8$ ,  $A\Gamma = 6$  και  $B\Gamma = 11$ .

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε την προβολή της πλευράς  $A\Gamma$  πάνω στην  $AB$  και να υπολογίσετε το μήκος της.

(Μονάδες 15)

Θέμα 16102

## ΘΕΜΑ 2

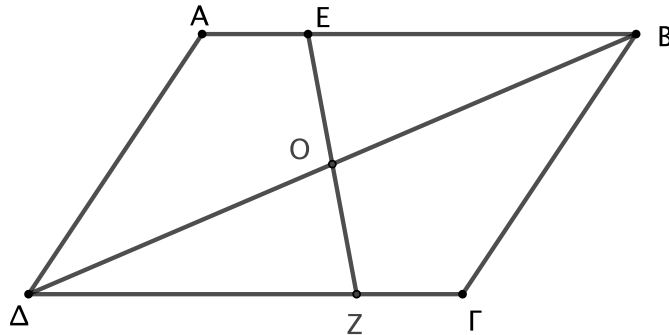
Θεωρούμε παραλληλόγραμμο  $ΑΒΓΔ$ . Από το κέντρο  $Ο$  φέρουμε ευθεία η οποία τέμνει τις πλευρές  $ΑΒ$  και  $ΓΔ$  στα σημεία  $Ε$  και  $Ζ$  όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $(ΔΟΖ) = (ΒΟΕ)$ .

(Μονάδες 10)

β)  $(ΔΟΕΑ) = (ΒΓΖΟ)$ .

(Μονάδες 15)



Θέμα 16113

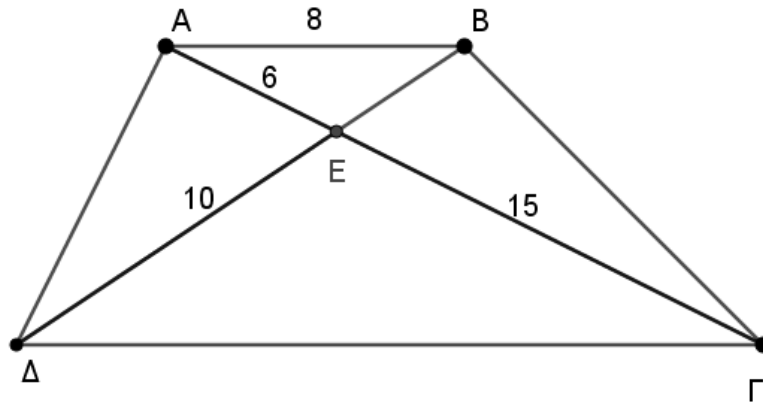
ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Delta\Gamma$ ,  $E$  σημείο τομής των διαγώνιων,  $AE = 6$ ,  $AB = 8$ ,  $\Gamma E = 15$  και  $\Delta E = 10$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AEB$  και  $\Gamma E\Delta$  είναι όμοια. (Μονάδες 09)

β) Να γράψετε την αναλογία των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 09)

γ) Να υπολογίσετε τα τμήματα  $BE$  και  $\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 07)



Θέμα 16114

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημείο  $E$  στην  $A\Gamma$  τέτοιο ώστε  $GE = \frac{1}{4}GA$ .

α) Αν  $\Delta$  σημείο της  $AB$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = \frac{1}{3}AB$ :

i. Να αποδείξετε ότι  $(AB\Gamma) = 4(A\Delta E)$  (Μονάδες 10)

ii. Αν από τα  $E$  και  $\Gamma$  φέρουμε τις κάθετες  $EZ$  και  $\Gamma H$  προς την  $AB$ , να υπολογίσετε τον

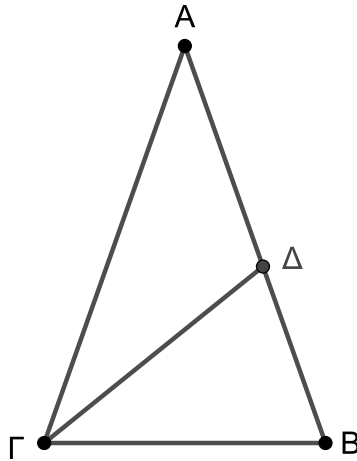
λόγο  $\frac{EZ}{\Gamma H}$  (Μονάδες 09)

β) Θεωρώντας ότι το  $E$  παραμένει ακίνητο, ενώ το  $\Delta$  κινείται στο εσωτερικό της  $AB$ , να βρείτε σε ποιο σημείο πρέπει να βρεθεί το  $\Delta$  ώστε  $(AB\Gamma) = 2(A\Delta E)$  (Μονάδες 06)

Θέμα 16126

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές με  $AB = A\Gamma = 36$  και  $B\Gamma = 24$ . Το σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$  είναι τέτοιο ώστε  $B\Delta = 16$ .



α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Gamma B\Delta$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{3}{2}$ .

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 12)

Θέμα 16127

## ΘΕΜΑ 2

Ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει πλευρά  $B\Gamma = 9$  και αντίστοιχο ύψος  $AD = 8$ .

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)

β) Ένα άλλο τρίγωνο  $A'B'\Gamma'$  είναι όμοιο με το τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η ομόλογη πλευρά της  $B\Gamma$  είναι η  $B'\Gamma' = 6$ . Να υπολογίσετε:

i. τον λόγο ομοιότητας των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$ , (Μονάδες 7)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου  $A'B'\Gamma'$ . (Μονάδες 9)

Θέμα 16133

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$  και  $\Delta E$  έχουν μήκη αντίστοιχα 12, 16, 8 και 10, οι γωνίες  $\hat{A}B\hat{\Gamma}$  και  $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}E$  είναι ορθές και τα σημεία  $A, \Gamma$  και  $E$  ανήκουν στην ίδια ευθεία.

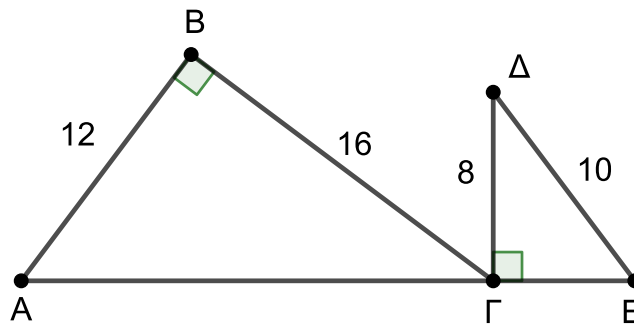
α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $AE$ . (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $E\Gamma\Delta$  είναι όμοια. (Μονάδες 7)

γ) Έστω ότι το σημείο τομής των ευθειών  $AB$  και  $ED$  είναι το  $Z$  και  $ZH$  είναι το ύψος του τριγώνου  $ZAE$  από την κορυφή του  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

i.  $EH = 13$ , (Μονάδες 6)

ii.  $ZH = \frac{52}{3}$ . (Μονάδες 5)



Θέμα 16135

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με υποτείνουσα  $B\Gamma = 10$  και έστω ότι  $\Delta$  είναι η προβολή της κορυφής  $A$  στην  $B\Gamma$ .

α) Αν  $\Delta B = 2$  να υπολογίσετε:

- i. το ύψος  $A\Delta$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , (Μονάδες 7)
- ii. το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 5)

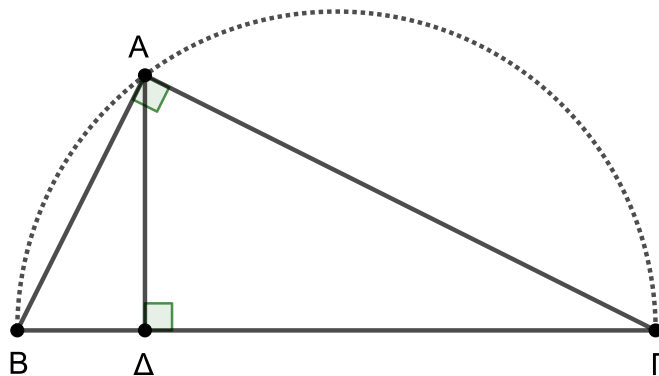
β) Υποθέστε ότι το σημείο  $A$  κινείται πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την  $B\Gamma$ .

- i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $(AB\Gamma) = 5A\Delta$ . (Μονάδες 7)
- ii. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για όλες τις θέσεις του  $A$  πάνω στο ημικύκλιο με διάμετρο την  $B\Gamma$ , το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  δεν υπερβαίνει το 25».

Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)



Θέμα 16582

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω τρίγωνο ΑΒΓ τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Έστω ότι  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \frac{1}{2}$ .

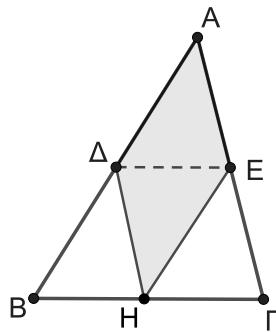
i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με το  $\frac{1}{4}$  του εμβαδού του

τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)

ii. Αν Η είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΔΗΕ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 12)

β) Αν γνωρίζετε ότι  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AG} = \lambda$ , τότε ποια είναι η σχέση των εμβαδών του τετραπλεύρου

ΑΔΗΕ και του τριγώνου ΑΒΓ; (Μονάδες 06)



Θέμα 16732

## ΘΕΜΑ 4

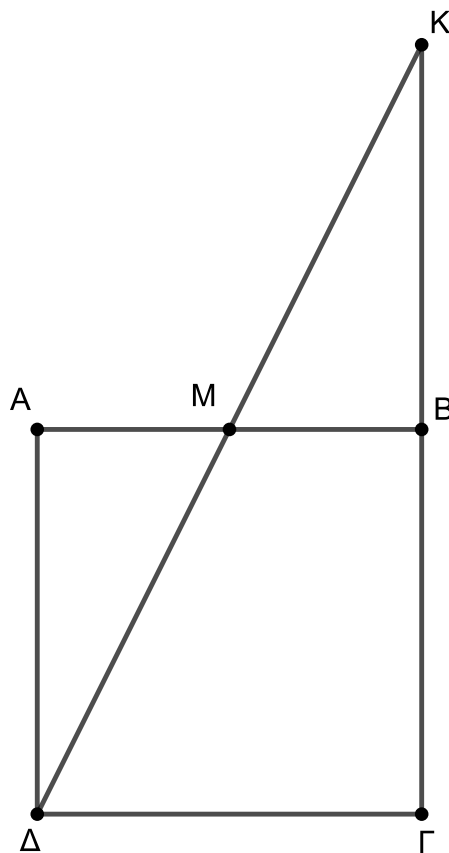
Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Οι ευθείες ΔΜ και ΓΒ τέμνονται στο Κ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΜΚΒ και ΔΚΓ είναι όμοια. (5 μονάδες)

β)  $(ΜΚΒ) = \frac{1}{4} (ΔΚΓ)$  (5 μονάδες)

γ)  $(ΜΒΓΔ) = \frac{3}{4} (ΑΒΓΔ)$ . (10 μονάδες)

δ) Αν  $(ΜΒΓΔ) = 75 \text{ m}^2$  να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου. (5 μονάδες)



Θέμα 16755

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 2A\Gamma$  και σημείο  $\Delta$  στην πλευρά  $B\Gamma$  τέτοιο ώστε  $A\Gamma = 2\Gamma\Delta$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{B\Gamma}{A\Gamma} \text{ και } \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$$

(Μονάδες 8)

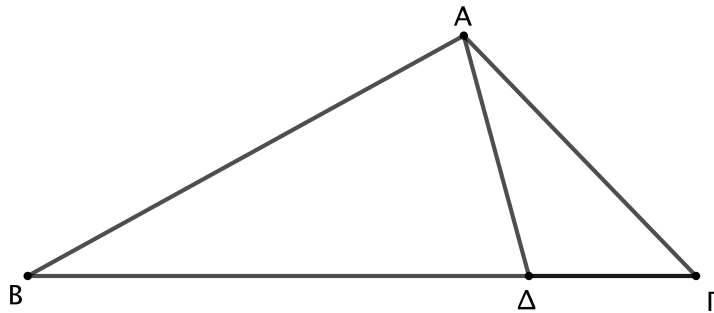
β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta A\Gamma$  είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες ισότητες οι οποίες προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $\Delta A\Gamma$  και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

$$\widehat{B\hat{A}\Gamma} = \dots, \quad \widehat{B} = \dots$$

(Μονάδες 8)



Θέμα 16756

## ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τυχαίο σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$ .

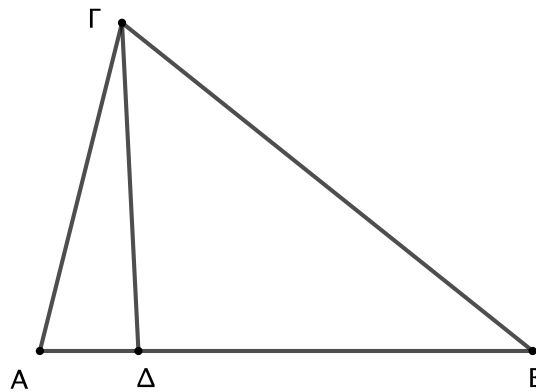
α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(AB\Gamma)}{(\Delta B\Gamma)} = \frac{AB}{\Delta B}$$

(Μονάδες 15)

β) Αν  $(AB\Gamma) = 25$  και  $AB = 5\Delta\Delta$ , τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta B\Gamma$ .

(Μονάδες 10)



Θέμα 16757

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $AB = 6$  και  $A\Gamma = 3$ . Θεωρούμε σημείο  $\Delta$  στην πλευρά  $AB$ , τέτοιο ώστε  $A\Delta = 4$ . Φέρουμε την απόσταση  $BE$  της κορυφής  $B$  από την  $\Gamma\Delta$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το τμήμα  $\Gamma\Delta$ .

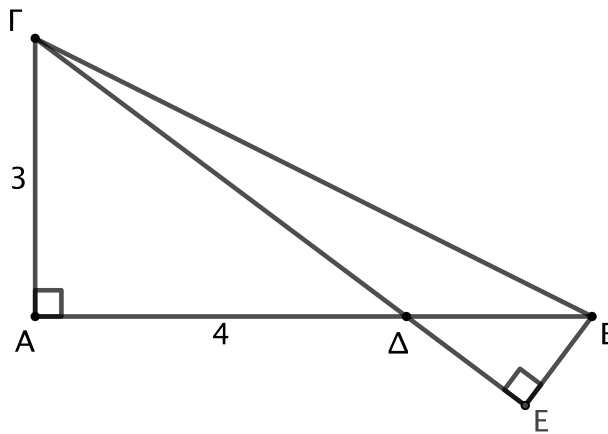
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta\Gamma$  και  $E\Delta B$  είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $BE$ .

(Μονάδες 8)



Θέμα 16770

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται γωνία  $\chi\hat{O}\psi$  και η διχοτόμος της  $O\delta$ . Πάνω στην  $O\delta$  παίρνουμε τυχαία σημεία  $A$  και  $B$ . Θεωρούμε σημείο  $E$  στην πλευρά  $O\chi$  τέτοιο ώστε  $O\hat{E}B = 70^\circ$  και σημείο  $\Delta$  στην  $O\psi$  τέτοιο ώστε  $O\hat{\Delta}A = 70^\circ$ .

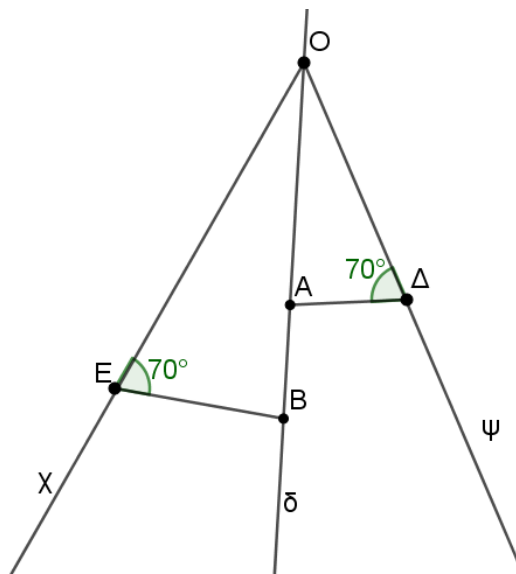
α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $OEB$  και  $O\Delta A$  είναι όμοια. (Μονάδες 10)

β) Αν  $\frac{OA}{OB} = \frac{2}{3}$  να υπολογίσετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών των τριγώνων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου  $O\Delta A$  είναι 28 τ.μ. να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $OEB$ .

(Μονάδες 09)



Θέμα 16804

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρουμε τα ύψη του  $AH$  και  $B\Theta$ .

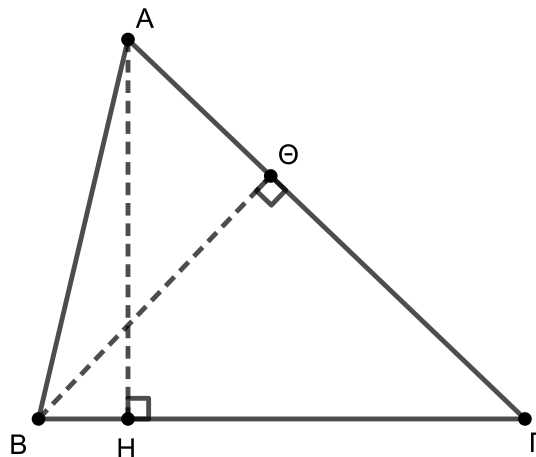
α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- i. Η προβολή της πλευράς  $B\Gamma$  στην πλευρά  $A\Gamma$  είναι το τμήμα .....
- ii. Η προβολή της πλευράς  $AB$  στην πλευρά  $B\Gamma$  είναι το τμήμα .....
- iii. Το τμήμα  $H\Gamma$  είναι η προβολή της πλευράς ..... στην πλευρά .....
- iv. Το τμήμα  $A\Theta$  είναι η προβολή της πλευράς ..... στην πλευρά .....
- v.  $A\Gamma^2 = AB^2 + \dots - 2 \cdot B\Gamma \cdot \dots$
- vi.  $B\Gamma^2 = \dots + A\Gamma^2 - 2 \cdot \dots \cdot A\Theta$

(Μονάδες 15)

β) Αν  $AB = 4$ ,  $B\Gamma = 5$  και  $A\Gamma = 6$ , να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $A\Theta$ .

(Μονάδες 10)



Θέμα 16805

## ΘΕΜΑ 2

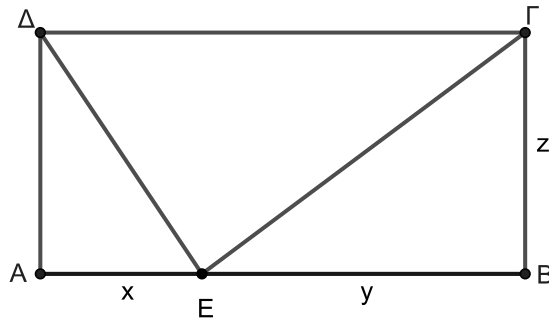
Η περίμετρος του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι 72 και το  $E$  είναι σημείο στην πλευρά  $AB$ . Τα μήκη των τμημάτων  $x$ ,  $y$ ,  $z$  είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $x = 8$ ,  $y = 16$  και  $z = 12$ .

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $ΓΕ\Delta$ .

(Μονάδες 12)



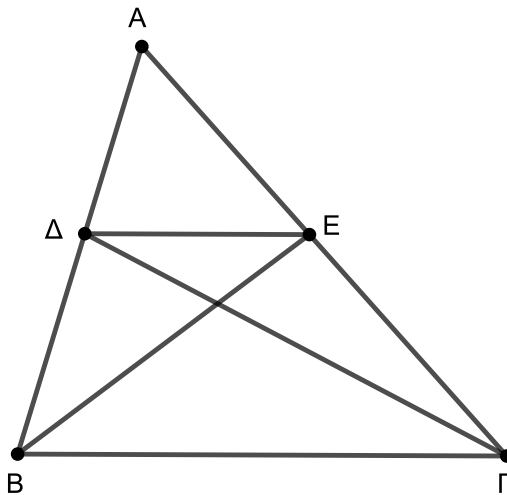
Θέμα 16806

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και από τυχαίο σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$  φέρουμε παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$  που τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί  $\frac{(\Delta\Delta E)}{(\Delta E B)} = \frac{A\Delta}{\Delta B}$  και  $\frac{(\Delta\Delta E)}{(\Delta E \Gamma)} = \frac{A E}{E \Gamma}$ . (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι  $(\Delta E B) = (\Delta E \Gamma)$ . (Μονάδες 12)



Θέμα 16807

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με διαστάσεις  $AB = 24$ ,  $B\Gamma = 12$  και σημείο  $E$  στην ευθεία  $AB$ .

α) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου  $ΓΕ\Delta$  όταν :

- i. Το σημείο  $E$  είναι το μέσο της πλευράς  $AB$ .
- ii. Το σημείο  $E$  ταυτίζεται με την κορυφή  $A$  του ορθογωνίου.

(Μονάδες 16)

β) Αφήνουμε το σημείο  $E$  να κινηθεί στην προέκταση του τμήματος  $AB$  προς το  $B$ , απομακρυνόμενο από το σημείο  $B$ .

- i. Να εξετάσετε αν η περίμετρος του τριγώνου  $ΓΕ\Delta$  αυξάνεται ή μειώνεται.

(Μονάδες 05)

- ii. Για το εμβαδό του τριγώνου  $ΓΕ\Delta$  συμβαίνει η ίδια μεταβολή με αυτή που απαντήσατε για την περίμετρο του τριγώνου  $ΓΕ\Delta$  στο ερώτημα β)i.; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 04)

Θέμα 16815

ΘΕΜΑ 4

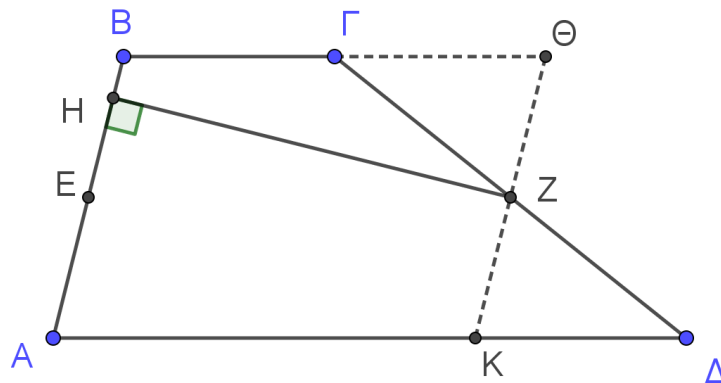
Έστω τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $B\Gamma \parallel A\Delta$ . Από το μέσο  $Z$  της  $\Gamma\Delta$  φέρνουμε παράλληλη προς την  $AB$  που τέμνει την  $A\Delta$  στο  $K$  και την προέκταση της  $B\Gamma$  στο  $\Theta$ . Επίσης φέρνουμε  $ZH \perp AB$ .

α) Να δείξετε ότι  $(AB\Gamma\Delta) = (AB\Theta K)$  (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι  $(AB\Gamma\Delta) = AB \cdot HZ$  (Μονάδες 5)

γ) Αν  $υ$  είναι το ύψος του τραapeζίου  $AB\Gamma\Delta$ , να δείξετε ότι:  $υ = \frac{2 \cdot AB \cdot HZ}{A\Delta + B\Gamma}$  (Μονάδες 5)

δ) Αν  $E$  είναι το μέσο του  $AB$  να δείξετε ότι  $(AEK) = \frac{1}{4} (AB\Gamma\Delta)$  (Μονάδες 9)



Θέμα 16817

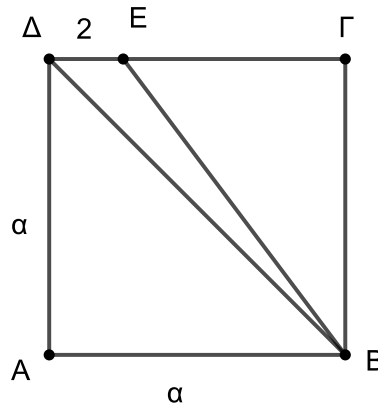
## ΘΕΜΑ 2

Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α, θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς του ΔΓ έτσι ώστε

$\Delta E = 2$ . Αν γνωρίζουμε ότι:  $(BE\Delta) = \frac{(AB\Gamma\Delta)}{8}$  τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η πλευρά του τετραγώνου α είναι ίση με 8. (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΒΕ. (Μονάδες 12)



Θέμα 16821

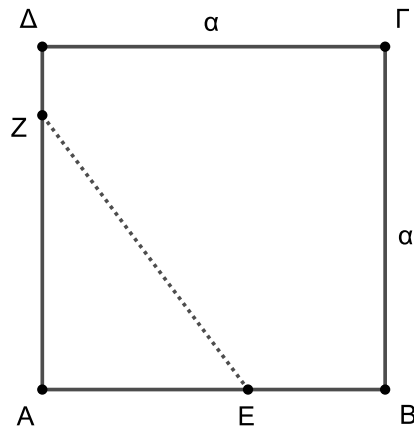
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς  $\alpha$ . Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Ε έτσι ώστε

$$AE = \frac{3}{5} AB, \text{ και στην πλευρά } AD \text{ θεωρούμε σημείο } Z \text{ έτσι ώστε } AZ = \frac{4}{5} AD.$$

α) Να υπολογίσετε συναρτήσει του  $\alpha$  τα εμβαδά, του τριγώνου ΑΕΖ και του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 12)

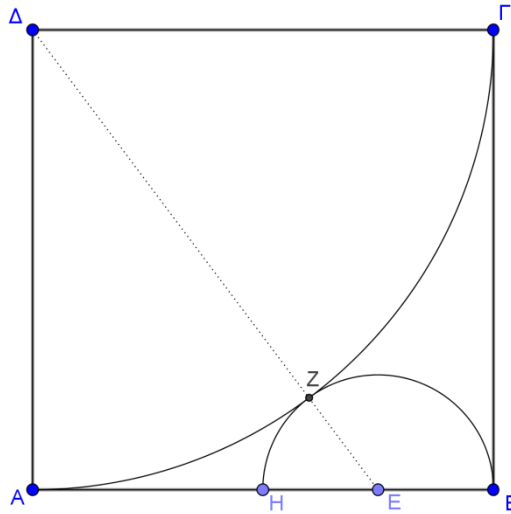
β) Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν του πενταγώνου ΕΒΓΔΖ είναι ίσο με 76 να υπολογίσετε το μήκος  $\alpha$  της πλευράς του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 13)



Θέμα 17216

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο πλευράς 8. Με κέντρο το  $\Delta$  κατασκευάζουμε το τόξο  $A\Gamma$ . Το ημικύκλιο με διάμετρο  $BH$  εφάπτεται στο τόξο  $A\Gamma$  στο  $Z$  και το  $E$  είναι το κέντρο του ημικυκλίου.



α) Να υπολογίσετε την ακτίνα  $\rho$  του ημικυκλίου.

(Μονάδες 9)

β) Αν  $\rho=2$ , να υπολογίσετε:

i. Τα εμβαδά του τετραγώνου, του τεταρτοκυκλίου και του ημικυκλίου.

(Μονάδες 7)

ii. Την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος  $AZ\Gamma BZHA$  που βρίσκεται εντός του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  και εκτός του ημικυκλίου και του τεταρτοκυκλίου.

(Μονάδες 9)

Θέμα 17342

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 7$ ,  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$  και ύψος  $A\Delta = 4$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\Gamma\Delta = 4$ .

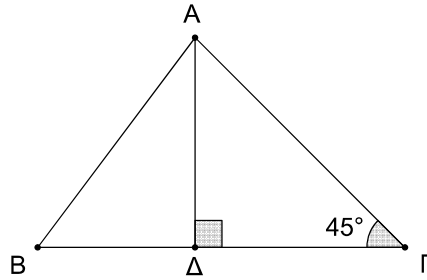
(Μονάδες 5)

ii.  $A\Gamma = 4\sqrt{2}$ .

(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $AB$ .

(Μονάδες 12)



Θέμα 17343

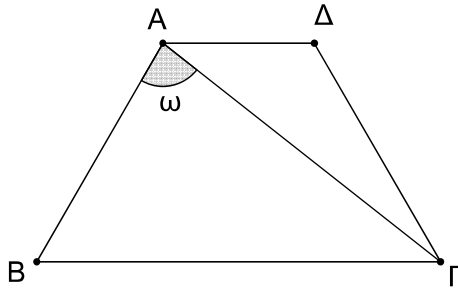
ΘΕΜΑ 2

Στο τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του παρακάτω σχήματος είναι  $A\Delta = 3$ ,  $AB = \Gamma\Delta = 5$ ,  $B\Gamma = 8$  και  $\hat{A} = 120^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = 7$ . (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι  $\text{συν}\omega = \frac{1}{7}$ , όπου  $\omega$  είναι η γωνία  $B\hat{A}\Gamma$ . (Μονάδες 15)

Δίνεται ότι  $\text{συν}120^\circ = -\frac{1}{2}$ .



Θέμα 17346

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 6$ ,  $B\Gamma = 4$  και  $\hat{B} = 60^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = 2\sqrt{7}$ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)

Δίνεται ότι  $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  και  $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

Θέμα 17347

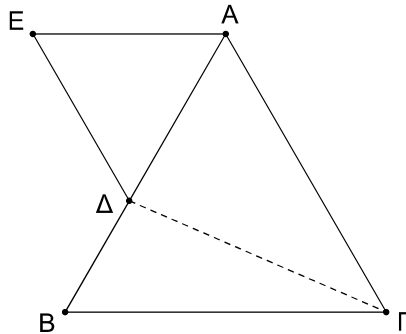
ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο πλευράς 10 και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο πλευράς 6.

α) Να αποδείξετε ότι  $(ΑΓΔ) = 15\sqrt{3}$ . (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΓΔΕ. (Μονάδες 13)

Δίνεται ότι  $\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .



Θέμα 17348

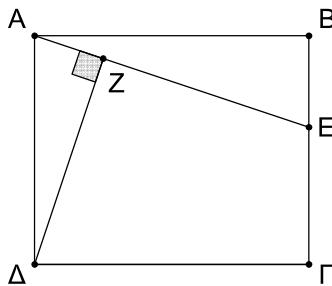
## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο με  $AB = 6$  και το  $E$  σημείο της πλευράς  $B\Gamma$ , ώστε  $BE = 2$ . Έστω  $\Delta Z$  το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το σημείο  $\Delta$  προς την  $AE$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $AE = 2\sqrt{10}$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABE$  και  $\Delta ZA$  είναι όμοια και να γράψετε την αναλογία που προκύπτει από τους λόγους των ομόλογων πλευρών τους. (Μονάδες 9)

γ) Αν  $\Delta Z = ZE$ , να υπολογίσετε το μήκος του  $A\Delta$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 17349

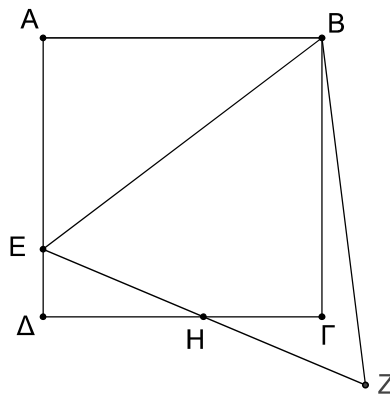
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς 3 και σημείο  $E$  της πλευράς  $AD$ , ώστε  $AE = 4 - \sqrt{3}$ . Στο ημιεπίπεδο που ορίζουν η ευθεία  $BE$  και το σημείο  $\Gamma$  κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο  $BEZ$ . Οι  $\Gamma\Delta$  και  $EZ$  τέμνονται στο σημείο  $H$  και  $\Delta H = \sqrt{3}$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $BE = 2\sqrt{7 - 2\sqrt{3}}$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε το  $H$  είναι το μέσο της  $EZ$ . (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται στο εσωτερικό του ισόπλευρου τριγώνου  $BEZ$  και εξωτερικά του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 17354

## ΘΕΜΑ 2

Στα παρακάτω τρίγωνο ΔΕΖ φέρουμε τα ύψη του ΔΚ και ΖΙ.

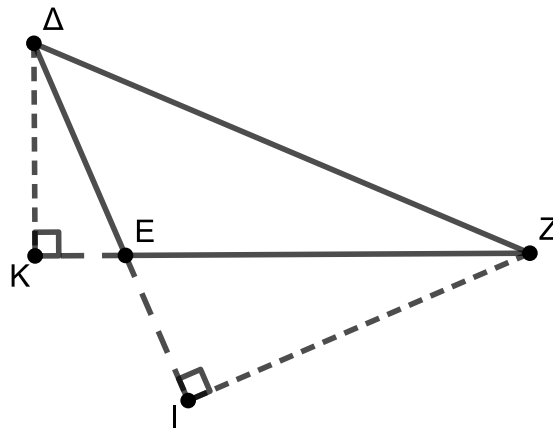
α) Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

- i. Η προβολή της πλευράς ΔΕ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα .....
- ii. Η προβολή της πλευράς ΔΖ στην πλευρά ΕΖ είναι το τμήμα .....
- iii. Το τμήμα ΔΙ είναι η προβολή της πλευράς ..... στην πλευρά .....
- iv. Το τμήμα ΕΙ είναι η προβολή της πλευράς ..... στην πλευρά .....
- v.  $\Delta Z^2 = \Delta E^2 + \dots + 2 \cdot \Delta E \cdot \dots$
- vi.  $EZ^2 = \dots + \Delta Z^2 - 2 \cdot \dots \cdot \Delta I$

(Μονάδες 15)

β) Αν  $\Delta E = 2$ ,  $EZ = 4$  και  $\Delta Z = 5$ , να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΔΙ.

(Μονάδες 10)



Θέμα 17599

## ΘΕΜΑ 4

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α του παρακάτω σχήματος, γράφουμε τεταρτοκύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου με κέντρο Α και ακτίνα α.

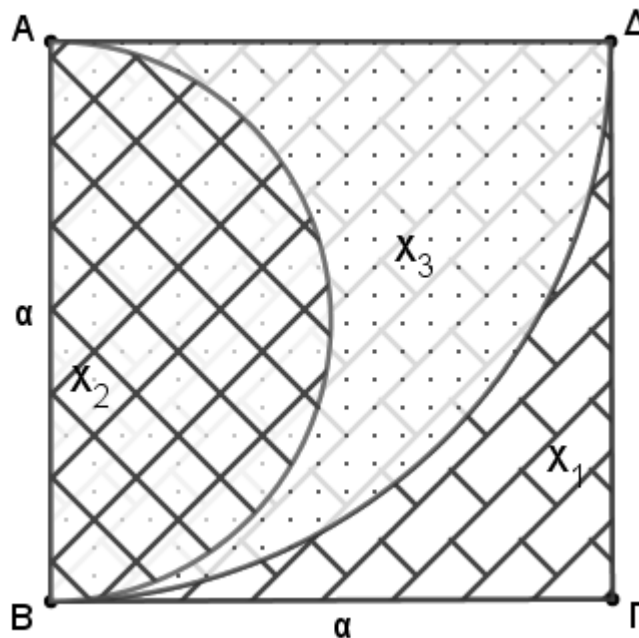
α) Αν  $X_1$  είναι το χωρίο του τετραγώνου που βρίσκεται εξωτερικά του τεταρτοκυκλίου,

να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ισούται με:  $(X_1) = \frac{\alpha^2}{4} \cdot (4-\pi)$  (Μονάδες 5)

β) Με διάμετρο ΑΒ κατασκευάζουμε ημικύκλιο εσωτερικά του τετραγώνου. Αν  $X_2$  είναι το χωρίο του ημικυκλίου και  $X_3$  το χωρίο του τεταρτοκυκλίου που βρίσκεται εξωτερικά του ημικυκλίου, να υπολογίσετε τα εμβαδά των δύο χωρίων  $X_2$  και  $X_3$ .

(Μονάδες 11)

γ) Ποιο από τα χωρία  $X_1$  κι  $X_2$  έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)



Θέμα 17907

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Με πλευρές τις  $AB$ ,  $A\Gamma$ ,  $B\Gamma$  κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου  $AB\Gamma$ , τα τετράγωνα  $ABHZ$ ,  $A\Gamma\Theta I$ ,  $B\Gamma P\Delta$ . Έστω  $E$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ , τα εμβαδά των τετραγώνων  $A\Gamma\Theta I$ ,  $ABHZ$ ,  $B\Gamma P\Delta$  αντίστοιχα. Αν ισχύουν οι ισότητες  $E_1 = 4E$ ,  $E_2 = 5E$  τότε:

α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με ορθή τη γωνία  $A$ .

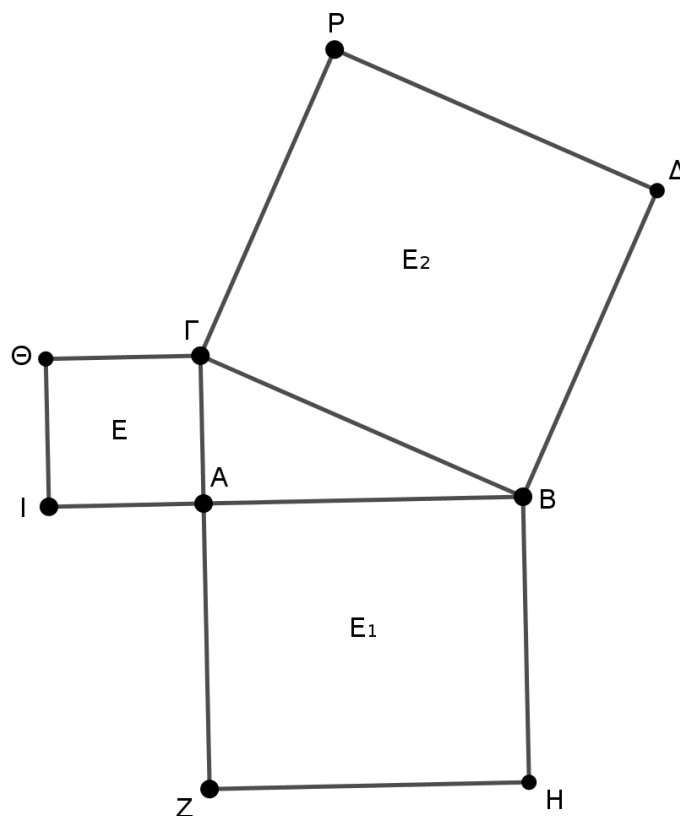
(Μονάδες 9)

β) να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων  $AB\Gamma$ ,  $AIZ$ ,  $BH\Delta$ ,  $\Gamma\Theta$  είναι ίσα.

(Μονάδες 9)

γ) αν η  $A\Gamma=1$  να υπολογίσετε το εμβαδόν του πολυγώνου  $ZH\Delta P\Theta I$ .

(Μονάδες 7)



Θέμα 17908

## ΘΕΜΑ 3

Σε τρίγωνο ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του είναι  $\alpha = 4$ ,  $\beta = \sqrt{17}$  και  $\gamma = 5$ .

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ, ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 9)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ από την κορυφή Α, τότε:

i. να υπολογίσετε το ΔΒ. (Μονάδες 9)

ii. να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 7)

Θέμα 17956

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και σημείο  $\Delta$  στο εσωτερικό του τμήματος  $B\Gamma$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε παράλληλες στις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$ . Η παράλληλη στην  $AB$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $Z$  και η παράλληλη στην  $A\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $E$ . Θεωρούμε  $K$  και  $\Lambda$  τα μέσα των  $B\Delta$  και  $\Delta\Gamma$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (EK\Delta) = \frac{(BE\Delta)}{2} \quad (\text{Μονάδες } 09)$$

$$\beta) (EZ\Delta) = \frac{(AE\Delta Z)}{2} \quad (\text{Μονάδες } 09)$$

γ) Το εμβαδόν του  $KEZ\Lambda$  είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου  $\Delta$ . (Μονάδες 07)

Θέμα 18098

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς  $a = 4$ . Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα  $\rho = 2$  σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του, όπως φαίνεται στο σχήμα.

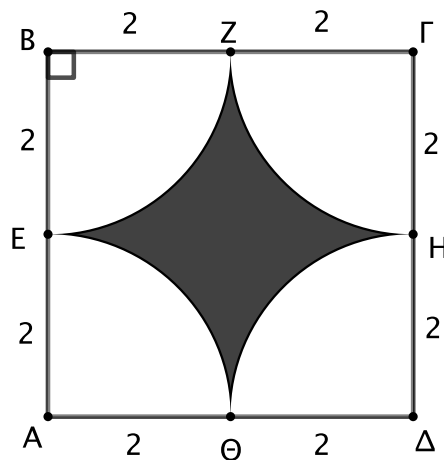
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα.

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου είναι

$$E = 4(4 - \pi)$$

(Μονάδες 12)



Θέμα 18101

## ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα, τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $AB\Delta$  είναι ισοσκελή με  $AB = AD = 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{B\Delta\Gamma}$  είναι ίσες.

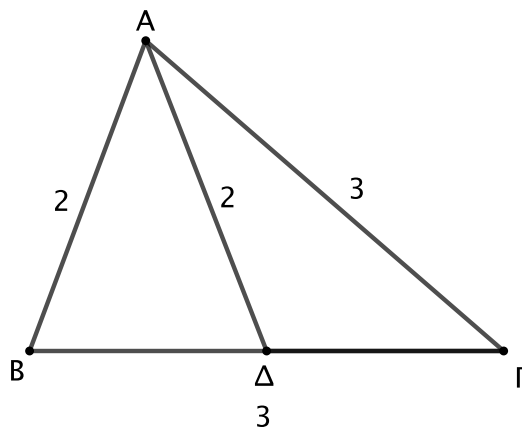
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $B\Delta A$  είναι όμοια.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο  $\frac{(AB\Gamma)}{(B\Delta A)}$  των εμβαδών των δύο τριγώνων.

(Μονάδες 8)



Θέμα 18173

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $\Gamma\Delta = 2AB$ . Δίνεται επίσης ότι το σημείο  $K$  είναι μέσο της  $\Gamma\Delta$  και  $M$  τυχαίο σημείο στην  $A\Delta$ .

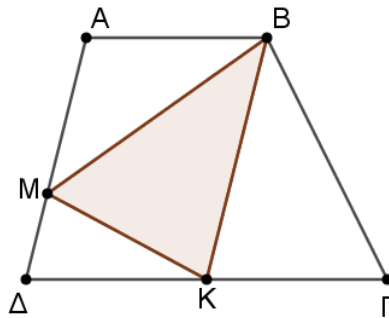
α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $(BK\Gamma) = \frac{1}{2} (ABK\Delta)$  (Μονάδες 09)

ii.  $(BMK) = (BK\Gamma)$  (Μονάδες 09)

β) Δίνεται η πρόταση: «Αν το σημείο  $M$  κινείται πάνω στο εσωτερικό της  $A\Delta$ , τότε ο λόγος των εμβαδών  $(AB\Gamma\Delta)$  και  $(MBK)$  παραμένει σταθερός και ίσος με 3». Να διερευνήσετε την ορθότητα της πρότασης αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)



Θέμα 18301

## ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  προεκτείνουμε τις πλευρές  $BA$  και  $\Gamma A$  κατά τμήματα  $A\Delta$  και  $A\epsilon$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι  $A\Delta = \frac{1}{2}AB$  και  $A\epsilon = \frac{2}{5}A\Gamma$ , να υπολογίσετε τον λόγο  $\frac{(A\Delta\epsilon)}{(AB\Gamma)}$ .

(Μονάδες 10)

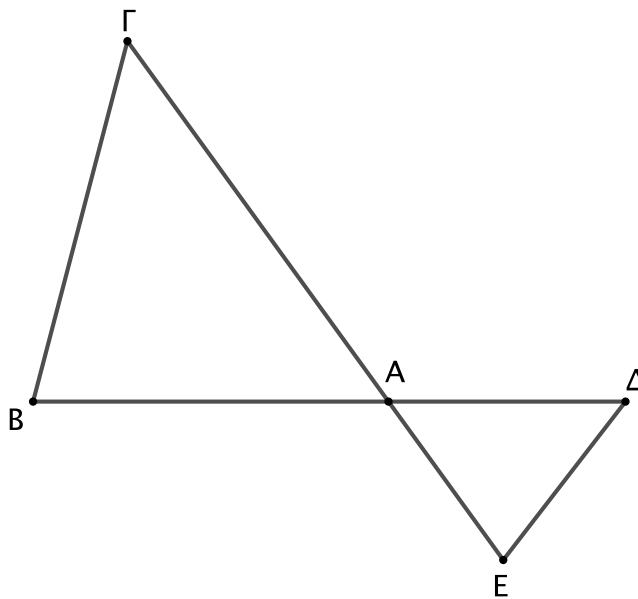
β) Αν είναι  $A\Delta = \frac{1}{\lambda}AB$  και  $A\epsilon = \frac{\lambda}{\mu}A\Gamma$ , όπου  $\lambda, \mu$  είναι θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε

ότι ο λόγος  $\frac{(A\Delta\epsilon)}{(AB\Gamma)}$  είναι ανεξάρτητος από την τιμή του  $\lambda$ .

(Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι «υπάρχουν άπειρα ζεύγη τιμών των ακεραίων  $\lambda$  και  $\mu$  για τα οποία είναι  $(A\Delta\epsilon) = (AB\Gamma)$ ». Να εξετάσετε αν ο ισχυρισμός του είναι αληθής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)



Θέμα 18302

## ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  προεκτείνουμε τις πλευρές  $BA$  και  $\Gamma A$  κατά τμήματα  $A\Delta$  και  $A\epsilon$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Αν είναι  $A\Delta = 2AB$  και  $A\epsilon = \frac{1}{2}A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta\epsilon$  και  $AB\Gamma$  είναι ισοδύναμα.

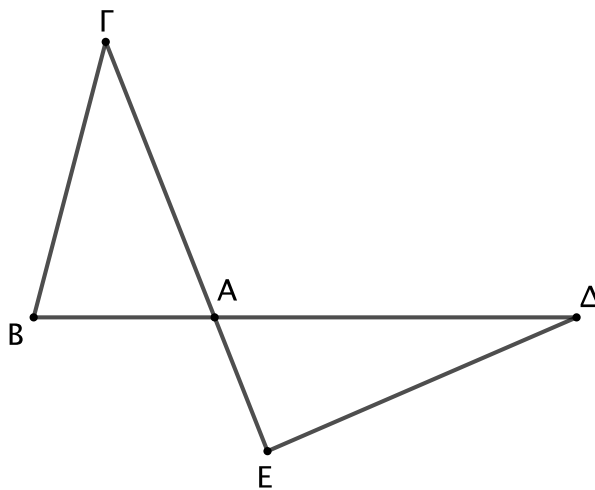
(Μονάδες 09)

β) Αν προεκτείνουμε τις πλευρές  $BA$  και  $\Gamma A$  κατά τμήματα είναι  $A\Delta = \mu \cdot AB$  και  $A\epsilon = \nu \cdot A\Gamma$  αντίστοιχα, όπου  $\mu, \nu$  είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ποια πρέπει να είναι η σχέση των αριθμών  $\mu$  και  $\nu$  ώστε τα τρίγωνα  $A\Delta\epsilon$  και  $AB\Gamma$  να είναι ισοδύναμα;

(Μονάδες 10)

γ) Αν είναι  $A\Gamma = \frac{3}{2}AB$  και  $A\Delta = 2AB$ , να βρείτε τις δυνατές θέσεις του  $\epsilon$  ώστε τα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta\epsilon$  να είναι όμοια.

(Μονάδες 06)



Θέμα 18369

## ΘΕΜΑ 4

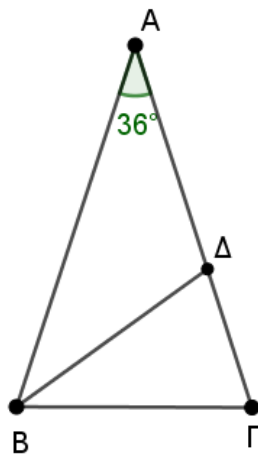
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ ,  $\hat{A} = 36^\circ$ .

α) Αν η  $B\Delta$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $B$ , να αποδείξετε ότι:

- i. Τα τρίγωνα  $B\Delta\Gamma$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια. (Μονάδες 10)
- ii. Να γράψετε τους λόγους των ανάλογων πλευρών. (Μονάδες 06)

β) Μετακινούμε το σημείο  $\Delta$  στο εσωτερικό της  $A\Gamma$ . Για ποια θέση του σημείου  $\Delta$  θα ισχύει

$$\frac{(AB\Delta)}{(\Delta B\Gamma)} = 3. \quad (\text{Μονάδες 09})$$



Θέμα 18370

## ΘΕΜΑ 4

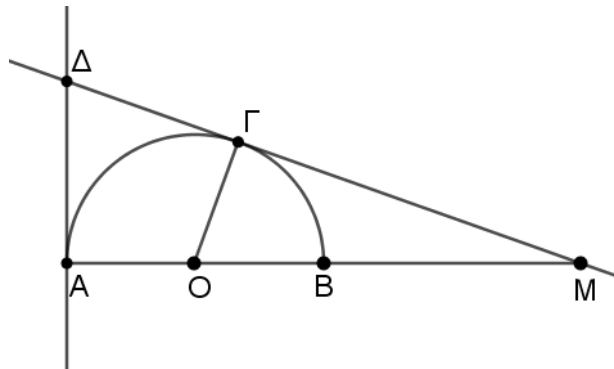
Δίνεται ημικύκλιο κέντρου  $O$  και διαμέτρου  $AB = 2\rho$ . Στην προέκταση του  $AB$  προς το  $B$ , θεωρούμε σημείο  $M$ . Από το  $M$  φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα  $M\Gamma$  στο ημικύκλιο. Αν η εφαπτόμενη του ημικυκλίου στο σημείο  $A$  τέμνει την προέκταση της  $M\Gamma$  στο  $\Delta$  τότε:

α) Αν  $BM = 2\rho$  να αποδείξετε ότι  $M\Gamma = 2\sqrt{2}\rho$ . (Μονάδες 09)

β)

i. Να αποδείξετε ότι  $\frac{MO}{M\Gamma} = \frac{M\Delta}{MA}$ . (Μονάδες 09)

ii. Αν για το  $M$  ισχύει ότι  $BM = \lambda\rho$ , όπου  $\lambda$  θετικός αριθμός, να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του  $\lambda$ , τέτοια ώστε  $(A\Delta M) = 9(MO\Gamma)$ . (Μονάδες 07)



Θέμα 18371

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\Delta$  μέσο της  $A\Gamma$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta E$  παράλληλη στην  $B\Gamma$  και ίση με το μισό της  $AB$  όπως στο σχήμα.

α)

i. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\Delta E}{2B\Gamma}$ . (Μονάδες 10)

ii. Αν το  $\Delta E\Gamma B$  είναι παραλληλόγραμμο, τότε να αποδείξετε ότι  $(\Delta E\Gamma) = (AB\Delta)$ .

(Μονάδες 10)

β) Σε ένα τεστ που χρειάστηκε από τους μαθητές να βρεθεί ο λόγος  $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)}$  ένας μαθητής

έγραψε: «Παρατηρώ ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta E\Gamma$  έχουν  $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$ , ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  που τέμνονται από την  $A\Gamma$  και δύο πλευρές τους ανάλογες, αφού

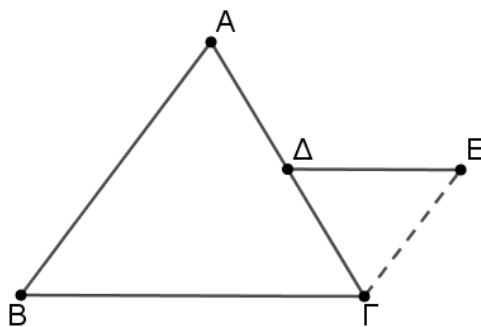
$\frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta E}{AB} = \frac{1}{2}$ . Επειδή έχουν δύο πλευρές ανάλογες μία προς μία και τις γωνίες τους  $\widehat{\Delta}, \widehat{\Gamma}$

ίσες, τα τρίγωνα θα είναι όμοια. Επομένως, ο λόγος των εμβαδών τους θα ισούται με το

τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.  $\frac{(\Delta E\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \left(\frac{\Delta E}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ». Ο καθηγητής του

του είπε ότι έχει κάνει ένα σημαντικό λάθος. Μπορείτε να εντοπίσετε σε ποιο σημείο ο συλλογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος;

(Μονάδες 05)



Θέμα 18550

## ΘΕΜΑ 2

Η περίμετρος του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$  του σχήματος είναι 36 και το  $E$  είναι σημείο στην πλευρά  $AB$ . Τα μήκη των τμημάτων  $x$ ,  $y$ ,  $z$  είναι ανάλογα προς τους αριθμούς 2,4,3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι  $x = 4$ ,  $y = 8$  και  $z = 6$ .

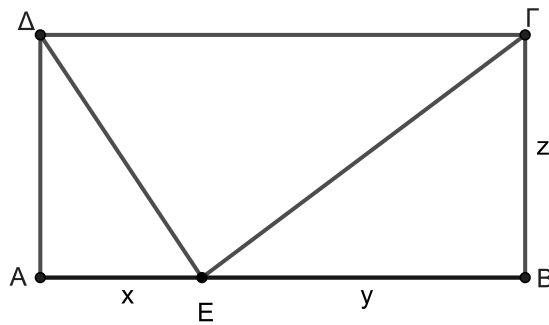
(Μονάδες 13)

β)

i. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $ΓΕΔ$ .

ii. Να βρεθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου  $ΓΕΔ$  προς το εμβαδό του ορθογωνίου  $AB\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 12)



Θέμα 18553

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο με πλευρά  $a$  και σημείο  $\Sigma$  στην προέκταση της πλευράς  $AB$  προς το  $B$  τέτοιο ώστε  $B\Sigma = AB$ .

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του  $a$ :

- i. Το εμβαδό του τριγώνου  $\Sigma\Delta\Gamma$ .
- ii. Το μήκος της πλευράς  $\Sigma\Gamma$  του τριγώνου  $\Sigma\Delta\Gamma$ .

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε τυχαίο σημείο  $\Sigma'$  στην προέκταση της πλευράς  $AB$  προς το  $B$  τέτοιο ώστε  $B\Sigma' > B\Sigma$ . Να συγκρίνετε αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- i. Το εμβαδό του τριγώνου  $\Sigma'\Delta\Gamma$  με το εμβαδό του τριγώνου  $\Sigma\Delta\Gamma$ .
- ii. Το μήκος της πλευράς  $\Sigma'\Gamma$  με το μήκος της πλευράς  $\Sigma\Gamma$  των τριγώνων  $\Sigma'\Delta\Gamma$  και  $\Sigma\Delta\Gamma$  αντίστοιχα.
- iii. Τις αποστάσεις του σημείου  $\Delta$  από τις ευθείες  $\Sigma\Gamma$  και  $\Sigma'\Gamma$ .

(Μονάδες 15)

Θέμα 18555

## ΘΕΜΑ 4

Σε τετράγωνο πλευράς  $a$  παίρνουμε σημείο  $\Sigma$  στην προέκταση της πλευράς  $AB$  προς το  $B$  τέτοιο ώστε  $B\Sigma = AB$ .

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του  $a$ :

- i. Το εμβαδό του τριγώνου  $\Sigma\Delta\Gamma$ .
- ii. Την περίμετρο του τριγώνου  $\Sigma\Delta\Gamma$ .

(Μονάδες 10)

β) Στην τάξη του Βρασίδα η καθηγήτρια των Μαθηματικών απέδειξε ότι αν το σημείο  $\Sigma'$  βρίσκεται στην προέκταση του  $AB$  προς το  $B$  και κινείται απομακρυνόμενο από το σημείο  $B$ , τότε οι πλευρές  $\Sigma'\Gamma$  και  $\Sigma'\Delta$  μεγαλώνουν. Οπότε, αν το  $\Sigma'$  είναι δεξιότερα από το  $\Sigma$ , θα ισχύει ότι  $\Sigma'\Gamma > \Sigma\Gamma$  και  $\Sigma'\Delta > \Sigma\Delta$ .

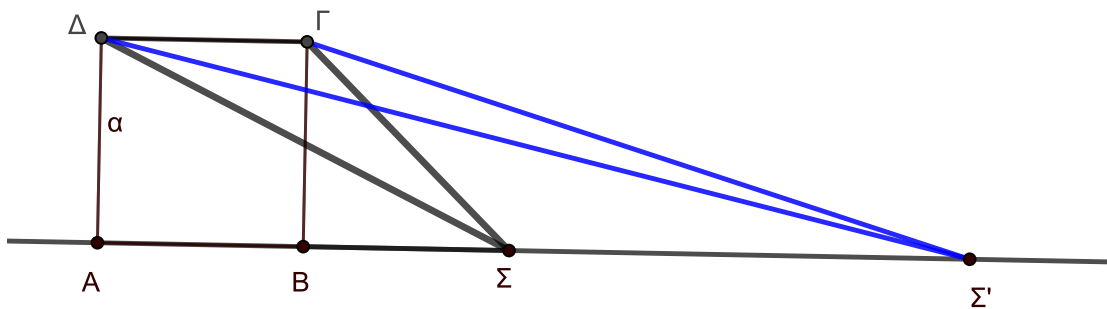
Ο Βρασίδας ζήτησε το λόγο και διατύπωσε τον ισχυρισμό :

«Η περίμετρος και το εμβαδό του τριγώνου  $\Sigma'\Delta\Gamma$  είναι μεγαλύτερα από την περίμετρο και το εμβαδό του τριγώνου  $\Sigma\Delta\Gamma$ ».

Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του Βρασίδα:

- i. σχετικά με τα εμβαδά των δύο τριγώνων; (Μονάδες 8)
- ii. σχετικά με την περίμετρο των δύο τριγώνων; (Μονάδες 7)

Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Θέμα 18557

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τραπέζιο  $ABΓΔ$  με βάσεις  $AB$  και  $ΓΔ$ , ώστε  $AB > ΓΔ$ . Από τις κορυφές  $Γ$  και  $Δ$  φέρουμε  $ΓΕ//ΑΔ$  και  $ΔΖ//ΓΒ$ , με  $E$  και  $Z$  σημεία στην πλευρά  $AB$  του τραpezίου.

α) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των τετραπλεύρων  $AΔΓΕ$  και  $BΓΔΖ$ . (Μονάδες 9)

β) Να εκφράσετε τις περιμέτρους των τετραπλεύρων  $AΔΓΕ$  και  $BΓΔΖ$  ως συνάρτηση των πλευρών του τραpezίου  $ABΓΔ$ . (Μονάδες 8)

γ) Πώς θα πρέπει να κατασκευάσουμε το τραπέζιο  $ABΓΔ$  ώστε τα τετράπλευρα  $AΔΓΕ$  και  $BΓΔΖ$  να έχουν ίσες περιμέτρους και ίσα εμβαδά; (Μονάδες 8)

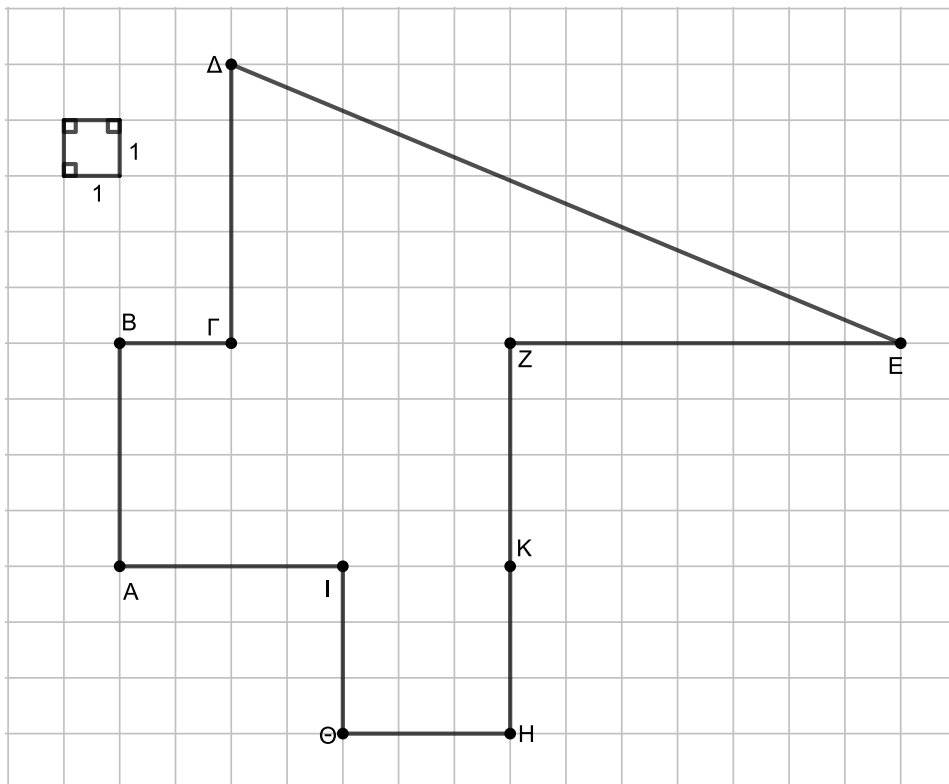
Θέμα 18558

ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα:

α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΔΕ. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔΕΖΗΘΙΑ. (Μονάδες 15)



Θέμα 18559

## ΘΕΜΑ 2

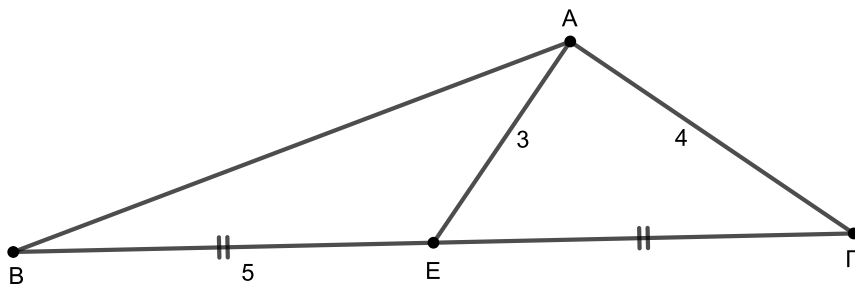
Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του παρακάτω σχήματος η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά  $B\Gamma$  έχει μήκος 3 και η πλευρά  $A\Gamma$  είναι ίση με 4. Αν  $BE=5$ , τότε:

α) Να αποδείξετε ότι η διάμεσος  $AE$  είναι κάθετη στην πλευρά  $A\Gamma$ . (Μονάδες 10)

β)

i. Να δικαιολογήσετε γιατί  $(ABE)=(A\Gamma E)$ . (Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 10)



Θέμα 18560

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $B\Gamma=13$  και  $\Gamma\Delta=14$ . Αν  $\Gamma E$  είναι το κάθετο τμήμα από το σημείο  $\Gamma$  στην πλευρά  $AB$  και το τμήμα  $AE$  έχει μήκος 9, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $\Gamma E$ . (Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό

i. του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ .

ii. του τραπεζίου  $AE\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 12)

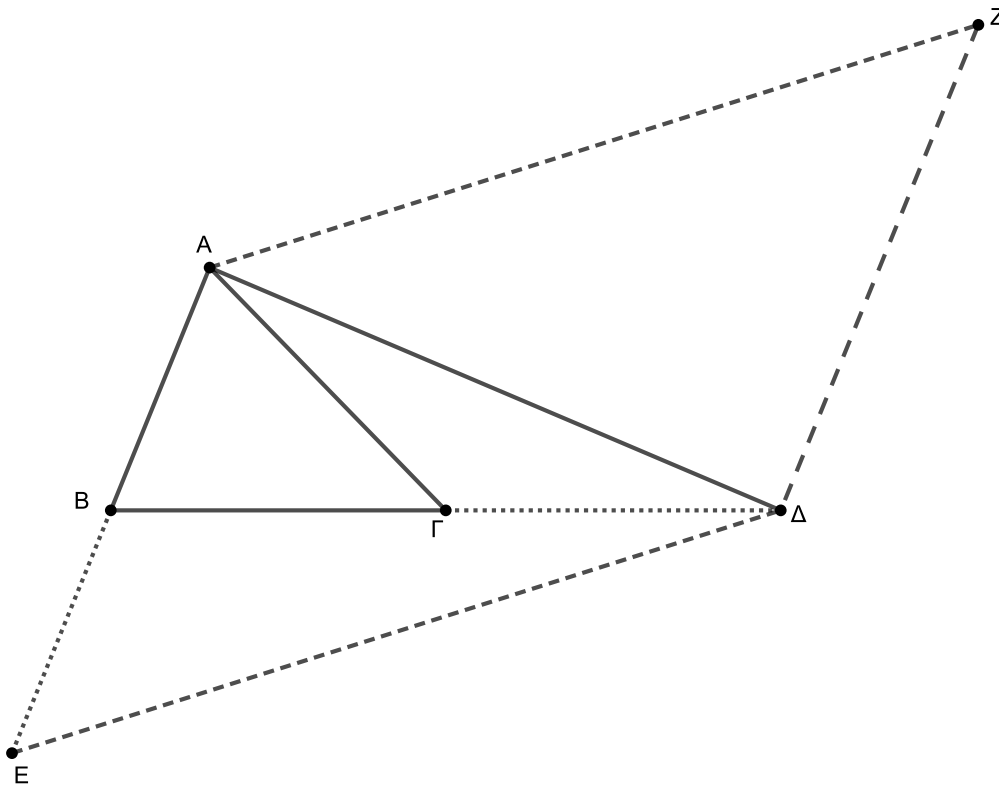
Θέμα 18561

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $B\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma\Delta=B\Gamma$  και την πλευρά  $AB$  κατά τμήμα  $BE=AB$ .

α) Αν  $(AB\Gamma)=25\text{ m}^2$ , να αποδείξετε ότι  $(B\Delta E)=50\text{ m}^2$ . (Μονάδες 10)

β) Από την κορυφή  $A$  φέρουμε ευθεία παράλληλη στην  $E\Delta$  και από την κορυφή  $\Delta$  ευθεία παράλληλη στην  $EA$  που τέμνονται στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AZ\Delta$  είναι 4-πλάσιο του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 15)



Θέμα 18562

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς  $a$ .

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος της διαγωνίου ΒΔ ισούται με  $a\sqrt{2}$  και να βρείτε το εμβαδό του. (Μονάδες 05)

β)

i. Να σχεδιάσετε το τετράγωνο ΒΔΖΗ έτσι ώστε το σημείο Α να είναι εσωτερικό σημείο του και να αποδείξετε ότι το σημείο Α είναι το κέντρο του τετραγώνου ΒΔΖΗ.

(Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΒΔΖΗ και να το συγκρίνετε με το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 08)

γ) Επαναλαμβάνουμε το σχεδιασμό όπως περιγράφηκε παραπάνω και σχηματίζουμε νέο τετράγωνο, με πλευρά κάθε φορά, τη διαγώνιο του προηγούμενου τετραγώνου.

Δηλαδή με πλευρά τη διαγώνιο ΔΗ του τετραγώνου ΒΔΖΗ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο, το ΔΗΘΚ. Με πλευρά τη διαγώνιο ΗΚ του ΔΗΘΚ σχεδιάζουμε νέο τετράγωνο κ.ο.κ. Αν θέλουμε να σχεδιάσουμε τετράγωνο του οποίου το εμβαδό του θα είναι 16 φορές το εμβαδό του αρχικού τετραγώνου ΑΒΓΔ, πόσες φορές ακόμη πρέπει να επαναλάβουμε το σχεδιασμό αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 05)

Θέμα 18564

## ΘΕΜΑ 4

Ο παππούς του Πέτρου έχει έναν κήπο σχήματος ορθογωνίου και θέλει να φυτέψει στον μισό διάφορα λουλούδια και στο υπόλοιπο γκαζόν. Λέει λοιπόν στον Πέτρο ότι έχει σκεφτεί κάποιους απλούς τρόπους να τον χωρίσει σε δύο κομμάτια που να έχουν το ίδιο εμβαδό.

α) Να σχεδιάσετε δύο (2) τρόπους με τους οποίους χωρίζεται ο κήπος σε δύο κομμάτια ίδιου εμβαδού και να αιτιολογήσετε τις επιλογές σας.

(Μονάδες 10)

β) Ο Πέτρος προτείνει στον παππού του έναν δικό του τρόπο για το χωρισμό. Για να ορίσει το κομμάτι που θα φυτευτεί με λουλούδια χρησιμοποιεί τρεις πέτρες. Τοποθετεί την πρώτη πέτρα σε ένα εσωτερικό σημείο της μιας πλευράς του κήπου και τις άλλες δύο στις απέναντι κορυφές του ορθογωνίου. Δείχνει στον παππού του το τρίγωνο που σχηματίζεται εξηγώντας του πως είναι το μισό του κήπου. Προτείνει δε στον παππού του, το τριγωνικό χωρίο που σχηματίζεται, να το μετακινήσει εκείνος σε όποια θέση νομίζει καλύτερα μετακινώντας μόνο την πρώτη πέτρα, χωρίς παρ' όλα αυτά να αλλάξει το εμβαδό του.

i. Να σχεδιάσετε τον τρόπο που προτείνει ο Πέτρος και να αποδείξετε ότι, το εμβαδό του σχηματιζόμενου τριγωνικού χωρίου είναι το μισό του κήπου.

(Μονάδες 08)

ii. Τι εννοεί ο Πέτρος λέγοντας ότι «το τριγωνικό χωρίο μπορεί να μετακινηθεί όταν αλλάζει η θέση της πρώτης πέτρας σε εσωτερικό σημείο της πλευράς του κήπου και παρ' όλα αυτά δεν αλλάζει το εμβαδό του»; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

Θέμα 18565

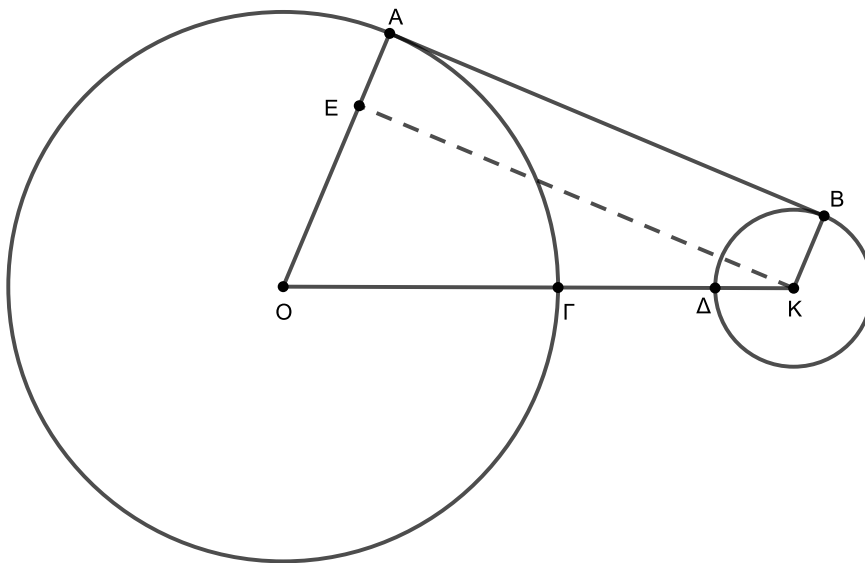
## ΘΕΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι με κέντρα  $O$  και  $K$ . Ο κύκλος με κέντρο  $O$  έχει ακτίνα  $R=7$  ενώ ο κύκλος με κέντρο  $K$  έχει ακτίνα  $\rho=2$ . Το τμήμα  $AB$  είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων και το τμήμα  $KE$  είναι παράλληλο στο τμήμα  $AB$  με  $E$  σημείο του τμήματος  $OA$ . Η διάκεντρος  $OK$  τέμνει τον κύκλο  $(O,R)$  στο σημείο  $\Gamma$  και τον κύκλο  $(K,\rho)$  στο σημείο  $\Delta$ .

α) Αν η θέση των δύο κύκλων είναι τέτοια ώστε, η απόσταση των σημείων  $\Gamma$  και  $\Delta$  είναι  $\Gamma\Delta=4$ , τότε:

- i. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος  $AB$ . (Μονάδες 10)
- ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $ABKO$ . (Μονάδες 07)

β) Ποια πρέπει να είναι η σχετική θέση των 2 κύκλων, ώστε το εμβαδόν του  $ABKE$  να ισούται με  $4\sqrt{14}$  τ.μ.; (Μονάδες 08)



Θέμα 18566

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ .

Με πλευρά την υποτείνουσα  $B\Gamma$  και έξω από το τρίγωνο, γράφουμε το τετράγωνο  $B\Gamma\Delta E$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $BA$  προς το  $A$  και παίρνουμε σημείο  $Z$  τέτοιο ώστε  $BZ = B\Gamma$ . Από τα σημεία  $\Gamma$  και  $Z$  φέρουμε παράλληλες προς τα τμήματα  $BZ$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα, που τέμνονται στο σημείο  $H$ .

α) Να δικαιολογήσετε γιατί το τετράπλευρο  $B\Gamma H Z$  είναι ρόμβος και να βρείτε τις περιμέτρους του ρόμβου και του τετραγώνου. (Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: «Ο ρόμβος και το τετράγωνο αφού έχουν ίσες περιμέτρους, θα έχουν και ίσα εμβαδά».

Ισχυρισμός 2: «Ο ρόμβος έχει μικρότερο εμβαδό από το τετράγωνο και μάλιστα, όπως έχουν κατασκευαστεί τα δύο τετράπλευρα δεν γίνεται να είναι ποτέ ισεμβαδικά».

Εξετάστε ποιος από τους 2 παραπάνω ισχυρισμούς είναι σωστός και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

Θέμα 19037

## ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα σημεία  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  των πλευρών  $AB$ ,  $B\Gamma$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα τέτοια ώστε

$$\Delta B = \frac{1}{5}AB, \quad E\Gamma = \frac{1}{4}B\Gamma, \quad Z\Gamma = \frac{1}{2}A\Gamma$$

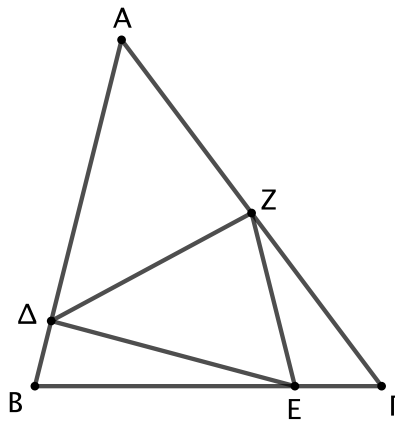
α) Να υπολογίσετε τους λόγους

$$\frac{(\Delta BE)}{(AB\Gamma)}, \quad \frac{(E\Gamma Z)}{(AB\Gamma)}, \quad \frac{(ZA\Delta)}{(AB\Gamma)}$$

(Μονάδες 15)

β) Αν είναι  $(AB\Gamma) = 120$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta EZ$ .

(Μονάδες 10)



Θέμα 20638

## ΘΕΜΑ 2

Δύο κανονικά πολύγωνα έχουν πλήθος πλευρών  $n_1$  και  $n_2$ , κεντρικές γωνίες  $\omega_1$  και  $\omega_2$  και γωνίες  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$ , αντίστοιχα. Αν ο λόγος του  $n_1$  προς το  $n_2$  είναι ίσος με  $\frac{1}{2}$ , τότε:

α) Να υπολογίσετε τον λόγο των αντίστοιχων κεντρικών γωνιών  $\omega_1$  και  $\omega_2$  αυτών των πολυγώνων.

(Μονάδες 10)

β) Αν το πλήθος των πλευρών ενός από τα δύο κανονικά πολύγωνα είναι  $n_1 = 5$ , να υπολογίσετε τον λόγο των γωνιών των τους  $\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ .

(Μονάδες 15)

Θέμα 20667

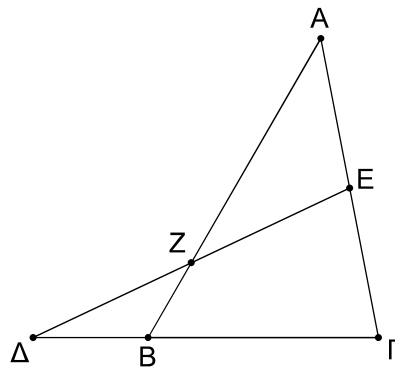
## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 8$ . Στην προέκταση της  $GB$  προς το  $B$  παίρνουμε σημείο  $\Delta$ , ώστε  $\Delta B = 4$  και  $E$  είναι το μέσο της  $A\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $(AB\Gamma) = 4A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι  $(\Gamma\Delta E) = 3A\Gamma \cdot \eta\mu\Gamma$ . (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $\Gamma\Delta E$  και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ , αν το εμβαδόν του τριγώνου  $\Gamma\Delta E$  είναι 12 τ.μ. (Μονάδες 8)



Θέμα 20672

## ΘΕΜΑ 2

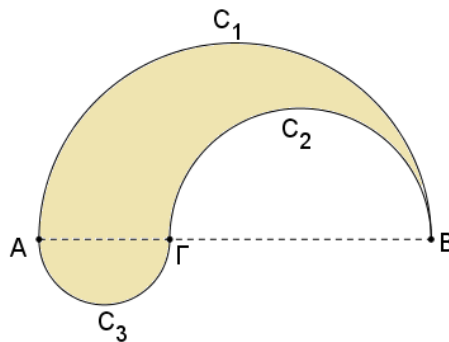
Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB = 6$ , και σημείο του  $\Gamma$ , ώστε  $B\Gamma = 4$ . Στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζει η  $AB$  σχεδιάζουμε τα ημικύκλια  $C_1$  και  $C_2$  με διαμέτρους  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα και στο άλλο ημιεπίπεδο σχεδιάζουμε ημικύκλιο  $C_3$  με διάμετρο  $A\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των ημικυκλίων  $C_1$ ,  $C_2$  και  $C_3$  είναι  $\frac{9\pi}{2}$ ,  $2\pi$  και  $\frac{\pi}{2}$  αντίστοιχα.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

(Μονάδες 10)



Θέμα 20678

ΘΕΜΑ 4

Η κορνίζα του παρακάτω σχήματος αποτελείται από δύο όμοια ορθογώνια με παράλληλες πλευρές και κοινό κέντρο  $O$ . Το ορθογώνιο  $A'B'Γ'D'$  έχει το μισό εμβαδόν από το ορθογώνιο  $ΑΒΓΔ$ .

α) Να βρείτε τον λόγο ομοιότητας του ορθογωνίου  $ΑΒΓΔ$  προς το ορθογώνιο  $A'B'Γ'D'$ .

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ΑΒΓ$  και  $A'B'Γ'$  είναι όμοια.

(Μονάδες 8)

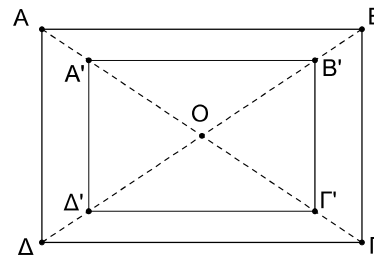
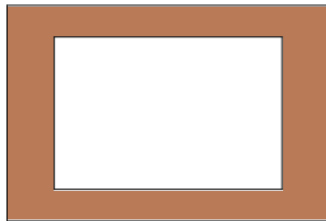
γ) Στην κορνίζα τοποθετούμε μια φωτογραφία που χωράει ακριβώς στο κάδρο, χωρίς να χάνεται κανένα μέρος της. Η διαγώνιος  $ΑΓ$  της κορνίζας έχει μήκος 40 cm και  $\widehat{ΑΟΒ} = 120^\circ$ .

i. Πόσο μήκος έχει η διαγώνιος της φωτογραφίας;

(Μονάδες 6)

ii. Πόσο είναι το εμβαδόν της φωτογραφίας;

(Μονάδες 8)



Θέμα 21067

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $A\Gamma = 12$  και  $AB = 5$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 13$ .

(Μονάδες 08)

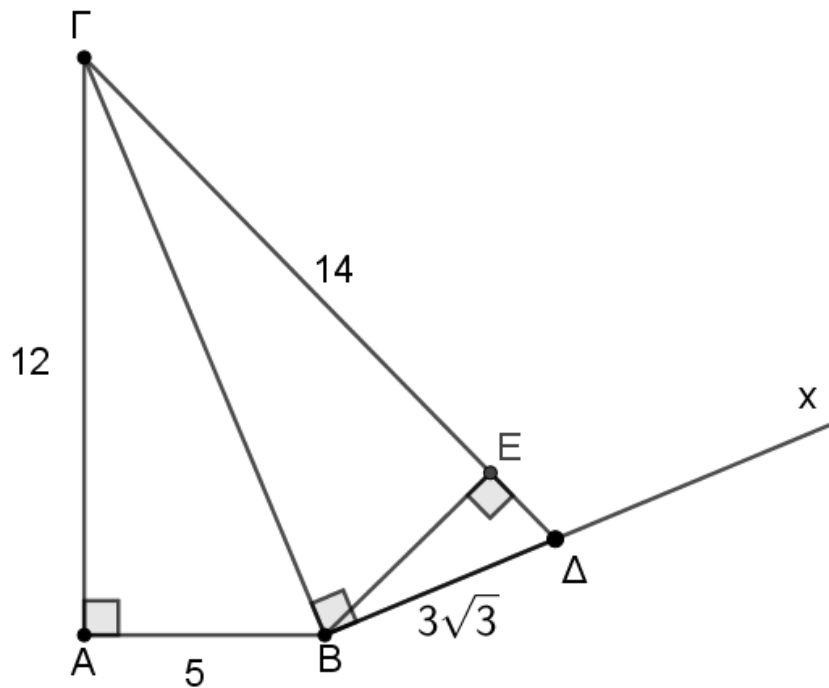
β) Φέρουμε ημιευθεία  $Bx$  κάθετη στη  $B\Gamma$  στο σημείο  $B$  και παίρνουμε σε αυτή σημείο  $\Delta$ , τέτοιο ώστε  $B\Delta = 14$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι  $BE = 3\sqrt{3}$ .

(Μονάδες 08)

ii. Να υπολογίσετε την προβολή της  $B\Delta$  στην  $\Delta\Gamma$ .

(Μονάδες 09)



Θέμα 21075

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$ , ακτίνα  $\rho$  και εμβαδόν ίσο με  $16\pi$ .

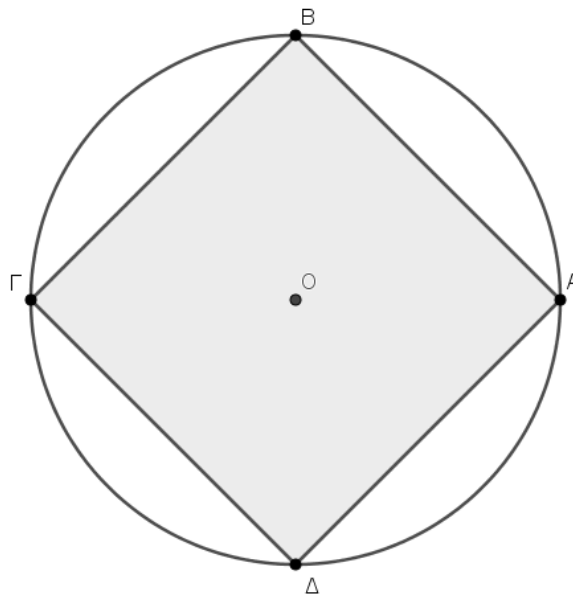
α) Να υπολογίσετε την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου. (Μονάδες 07)

β) Αν η ακτίνα  $\rho$  του κύκλου είναι 4 να υπολογίσετε:

i. Την πλευρά του εγγεγραμμένου τετραγώνου στον κύκλο. (Μονάδες 09)

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ανάμεσα στο τετράγωνο και στον κύκλο.

(Μονάδες 09)



Θέμα 21101

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές  $BΓ = \sqrt{3}$ ,  $ΑΒ = \sqrt{2}$ ,  $ΑΓ = 1$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $\hat{A} = 90^\circ$ . (Μονάδες 09)
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 07)
- γ) Να υπολογίσετε το ύψος ΑΔ. (Μονάδες 09)

Θέμα 21102

## ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και έστω Ε το μέσο της ΔΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $ΑΓ = α\sqrt{2}$ .

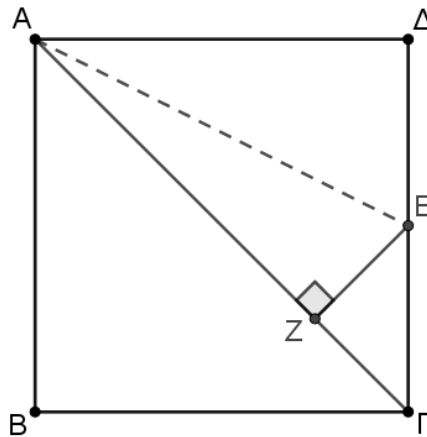
(Μονάδες 09)

ii.  $ΑΕ = α\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε την προβολή του τμήματος ΑΕ στην ΑΓ.

(Μονάδες 07)



Θέμα 21103

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς  $2\alpha$  και με διαμέτρους τις ΒΓ και ΒΑ φτιάχνουμε εξωτερικά του τετραγώνου ημικύκλια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το μήκος κάθε ημικυκλίου ισούται με  $\pi \cdot \alpha$ . (Μονάδες 07)

β)

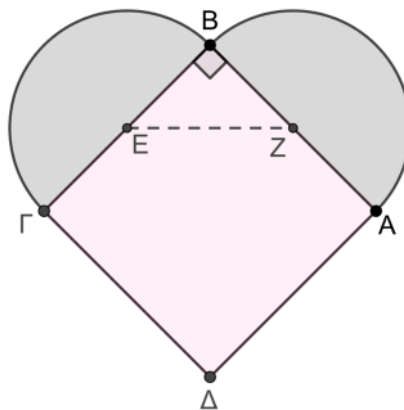
i. Αν η περίμετρος της καρδιάς είναι  $2\pi+4$ , να υπολογίσετε το  $\alpha$ . (Μονάδες 06)

ii. Αν  $\alpha = 1$  να βρείτε το μήκος του τμήματος που ενώνει τα κέντρα των δύο ημικυκλίων.

(Μονάδες 06)

γ) Αν  $(\tau)$  είναι το άθροισμα των εμβαδών των δυο ημικυκλίων να συγκρίνετε τον λόγο

$\frac{(\tau)}{(ΑΒΓΔ)}$  με την μονάδα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 06)



Θέμα 21120

## ΘΕΜΑ 2

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = \sqrt{2}$ . Από σημείο  $\Delta$  της πλευράς  $AB$  ώστε  $A\Delta = 1$ , φέρνουμε παράλληλη στη  $B\Gamma$  η οποία τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

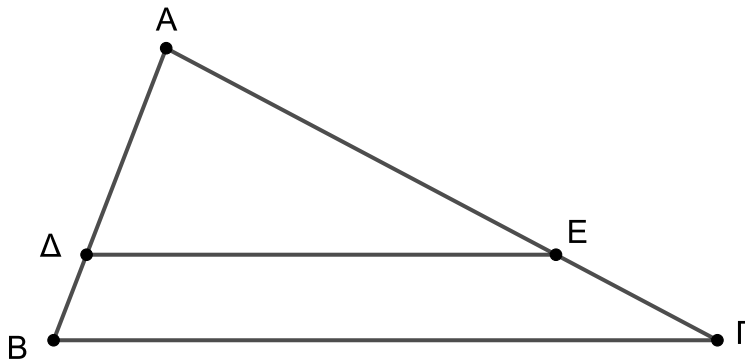
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια και να γράψετε τον λόγο ομοιότητας ,
- ii. το εμβαδόν του τριγώνου  $A\Delta E$  είναι το μισό του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 18)

β) Αν το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι 2, να βρείτε τα εμβαδά του τριγώνου  $A\Delta E$  και του τραpezίου  $B\Gamma E\Delta$ .

(Μονάδες 7)



Θέμα 21121

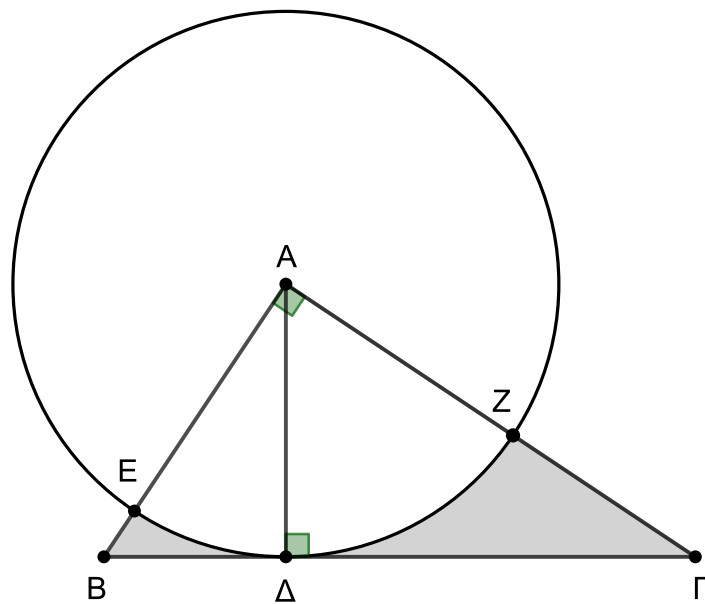
## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα, το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει υποτείνουσα  $B\Gamma = 13$  και αντίστοιχο ύψος  $A\Delta = 6$ . Με κέντρο το  $A$  και ακτίνα  $A\Delta$  γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τα εμβαδά:

- i. του κυκλικού τομέα  $A\widehat{E\Delta Z}$ , (Μονάδες 9)
- ii. του σκιασμένου χωρίου που είναι εσωτερικά του τριγώνου  $AB\Gamma$  και εξωτερικά του κύκλου, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα. (Μονάδες 8)



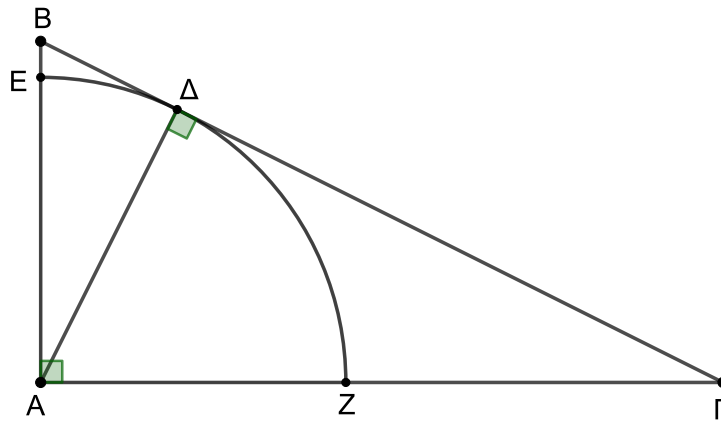
Θέμα 21122

## ΘΕΜΑ 2

Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του σχήματος, το  $\Delta$  είναι η προβολή της κορυφής  $A$  στην υποτείνουσα  $B\Gamma$  και είναι  $B\Delta = 1$  και  $\Delta\Gamma = 4$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = 2$ . (Μονάδες 12)

β) Με κέντρο το  $A$  και ακτίνα  $A\Delta$  γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$ , στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου  $\widehat{E\Delta Z}$ . (Μονάδες 13)



Θέμα 21124

## ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $\alpha = 40$ ,  $\beta = 25$ ,  $\gamma = 25$  και αντίστοιχα ύψη  $u_\alpha$ ,  $u_\beta$ ,  $u_\gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι αμβλυγώνιο. (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $E = 300$  και τα ύψη του είναι  $u_\alpha = 15$  και  $u_\beta = u_\gamma = 24$ . (Μονάδες 7)

iii. Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη  $u_\alpha$ ,  $u_\beta$ ,  $u_\gamma$  είναι οξυγώνιο. (Μονάδες 7)

β) Θεωρήστε τον ισχυρισμό: «Το τρίγωνο που κατασκευάζεται με πλευρές ίσες με τα ύψη οποιουδήποτε ισοσκελούς και αμβλυγωνίου τριγώνου, είναι ισοσκελές και οξυγώνιο.» Είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

Θέμα 21149

## ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$  θεωρούμε διάμετρο  $AB$  και σημείο  $\Gamma$  του κύκλου τέτοιο ώστε  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 30^\circ$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν  $B\Gamma = 2$ , τότε:

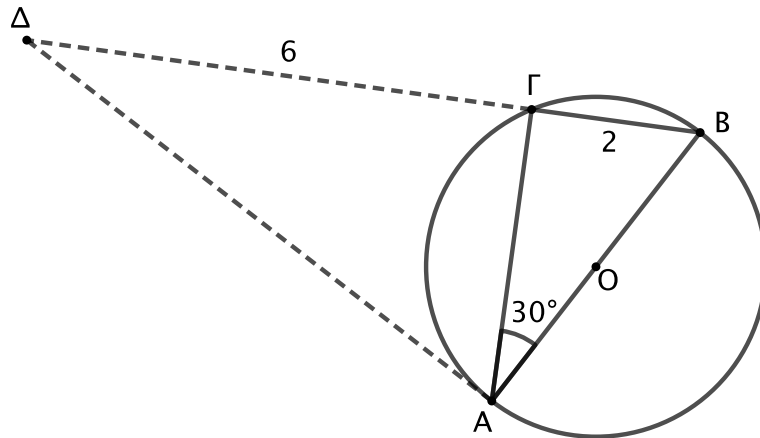
α) Να υπολογίσετε:

- Την ακτίνα  $R$ .
- Το μήκος της πλευράς  $A\Gamma$ .

(Μονάδες 16)

β) Θεωρούμε σημείο  $\Delta$  στην προέκταση της  $B\Gamma$  τέτοιο ώστε  $\Gamma\Delta = 6$ . Να εξετάσετε αν το τμήμα  $\Delta A$  εφάπτεται του κύκλου στο σημείο  $A$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)



Θέμα 21183

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  έχει πλευρά  $\sqrt{2}$  και το τετράγωνο  $\Delta EZH$  έχει πλευρά 1.

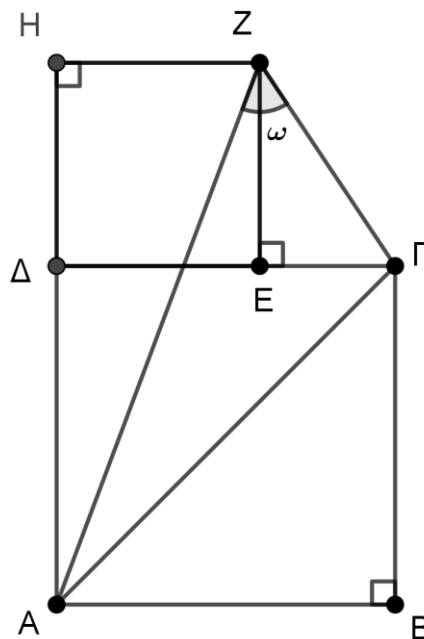
α) Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = 2$ . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i.  $AZ^2 = 4 + 2\sqrt{2}$ . (Μονάδες 7)

ii.  $\Gamma Z^2 = 4 - 2\sqrt{2}$ . (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε σε μοίρες το μέτρο της γωνίας  $\hat{AZ}\Gamma = \hat{\omega}$ . (Μονάδες 5)



Θέμα 21185

ΘΕΜΑ 4

Τρία ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  έχουν μήκη ανάλογα των αριθμών 5, 4 και 3 αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα αυτά μπορούν να σχηματίσουν ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 8)

β) Αν τα ευθύγραμμα τμήματα  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$  είναι σχεδιασμένα πάνω σε ένα χαρτί και αυτό το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση  $\lambda\%$ , να αποδείξετε ότι και με τα νέα ευθύγραμμα τμήματα σχηματίζεται πάλι ορθογώνιο τρίγωνο. (Μονάδες 10)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί να σχηματιστεί τρίγωνο με πλευρές  $10\alpha$ ,  $8\beta$  και  $6\gamma$ . (Μονάδες 7)

Θέμα 21189

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (ΑΒΓ) = (ΑΓΔ) = \frac{1}{2}(ΑΒΓΔ) \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

$$\beta) \frac{(ΒΜΝ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{4} \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

$$\gamma) (ΒΜΝ) = \frac{1}{8}(ΑΒΓΔ) \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

Θέμα 21192

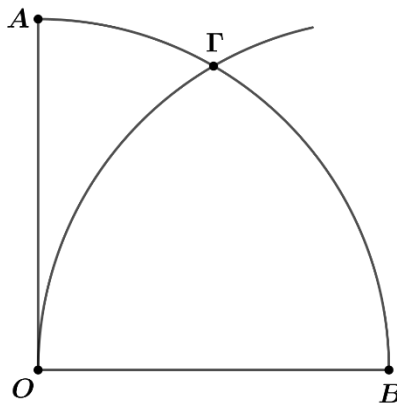
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τεταρτοκύκλιο  $O \widehat{AB}$  κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$ . Αν ο κύκλος κέντρου  $B$  και ακτίνας  $R$  τέμνει το τόξο  $\widehat{AB}$  στο σημείο  $\Gamma$  όπως στο σχήμα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $OB\Gamma$  είναι ισόπλευρο και το μήκος  $\ell_{B\Gamma}$  του τόξου  $\widehat{B\Gamma}$  είναι  $\ell_{\widehat{B\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R}{3}$ . (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το μήκος του τόξου  $\widehat{A\Gamma}$  είναι  $\ell_{\widehat{A\Gamma}} = \frac{\pi \cdot R}{6}$ . (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου  $OAG$  που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα  $OA$  και τα τόξα  $\widehat{A\Gamma}$  και  $\widehat{O\Gamma}$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 21193

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα τρεις κυκλικοί τροχοί με ίσες ακτίνες μήκους  $R$ , έχουν τα κέντρα τους στις κορυφές τριγώνου  $AB\Gamma$  με πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$  και  $\gamma$ . Ένας τεντωμένος ιμάντας μήκους  $L$  συνδέει τους τρεις ίσους τροχούς όπως στο σχήμα και εφάπτεται σε αυτούς στα σημεία  $K$ ,  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $\Sigma$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο  $A\Lambda M\Gamma$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 4)

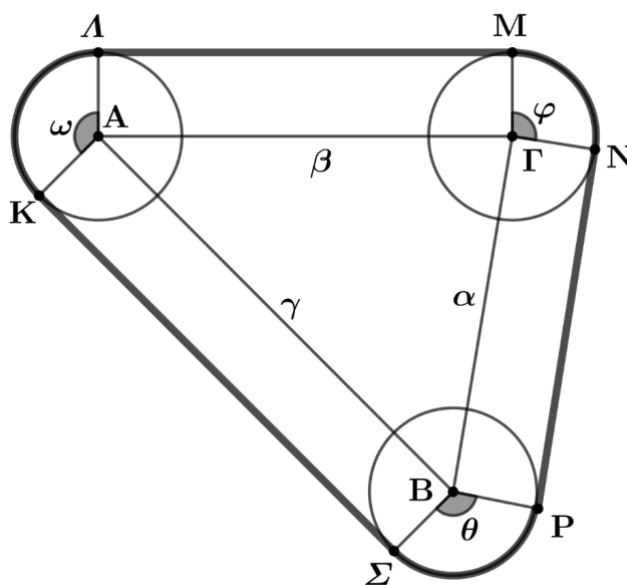
ii. Η κυρτή γωνία  $\widehat{K\Lambda\Lambda}$  και η γωνία  $\widehat{A}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι παραπληρωματικές.

(Μονάδες 4)

β) Αν  $\widehat{K\Lambda\Lambda} = \widehat{\omega}$ ,  $\widehat{\Sigma B P} = \widehat{\theta}$ ,  $\widehat{M\Gamma N} = \widehat{\varphi}$ , να αποδείξετε ότι  $\widehat{\omega} + \widehat{\theta} + \widehat{\varphi} = 360^\circ$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το μήκος του ιμάντα  $L$  είναι  $L = 2(\tau + \pi R)$  όπου  $\tau$  είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 21194

## ΘΕΜΑ 4

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , η  $AM$  είναι διάμεσός του και το σημείο  $E$  είναι το μέσο της  $AM$ . Από το  $E$  φέρουμε παράλληλες στις  $AB$  και  $A\Gamma$ , οι οποίες τέμνουν τη  $B\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $Z$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) (\text{AMB}) = (\text{AM}\Gamma) \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

$$\beta) (\text{ME}\Delta) = \frac{1}{8} \cdot (\text{AB}\Gamma) \quad (\text{Μονάδες } 12)$$

$$\gamma) (\text{AB}\Delta\text{E}) = (\text{A}\Gamma\text{Z}\text{E}) \quad (\text{Μονάδες } 8)$$

Θέμα 21196

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές  $\beta = 8$  και  $\gamma = 6$ .

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E$  του τριγώνου ΑΒΓ είναι  $E = 24$  (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε:

i. Να υπολογιστεί το μήκος της πλευράς  $\alpha$  του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 6)

ii. Το ύψος του  $u_\alpha$  που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα  $\alpha$  του τριγώνου. (Μονάδες 7)

iii. Την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. (Μονάδες 7)

Θέμα 21197

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς  $2a$  και  $\Lambda$  το μέσο της πλευράς του ΓΔ. Έστω ότι το ημικύκλιο, που σχεδιάζεται στο εσωτερικό του τετραγώνου με διάμετρο την πλευρά του ΑΒ, έχει εμβαδόν 10. Τότε:

α) Να αποδείξετε ότι:

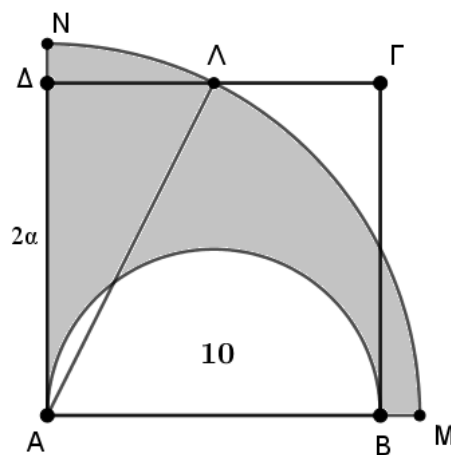
i. Το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι  $(ΑΒΓΔ) = \frac{80}{\pi}$ , (Μονάδες 6)

ii.  $A\Lambda^2 = \frac{100}{\pi}$  (Μονάδες 6)

β) Με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΛ κατασκευάζουμε τεταρτοκύκλιο  $A\widehat{MN}$ , και έστω Μ, Ν είναι τα σημεία τομής του με τις προεκτάσεις των πλευρών του τετραγώνου ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

i. Το εμβαδό του σκιασμένου χωρίου ΑΒΜΝΑ. (Μονάδες 8)

ii. Τον λόγο του εμβαδού του τεταρτοκυκλίου  $A\widehat{MN}$  προς το εμβαδό του τετραγώνου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 5)



Θέμα 21298

## ΘΕΜΑ 2

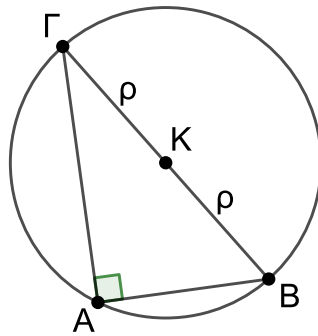
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $\hat{A}$  ορθή γωνία και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου, που έχει κέντρο το  $K$  και ακτίνα  $\rho$ . Επίσης δίνεται ότι το μήκος του κύκλου ισούται με  $10\pi$ .

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα  $\rho$  του κύκλου έχει μήκος 5. (Μονάδες 08)

β) Αν η χορδή  $AB$  έχει μήκος 6 να υπολογίσετε:

i. το μήκος της χορδής  $A\Gamma$  του κύκλου, (Μονάδες 10)

ii. το εμβαδόν τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 07)



Θέμα 21299

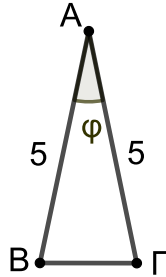
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma = 5$  και η γωνία της κορυφής  $\hat{\varphi}$  έχει  $\eta\mu\varphi = \frac{2}{5}$ .

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 12)

β) Να σχεδιάσετε το ύψος  $BH$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και να υπολογίσετε το μήκος του.

(Μονάδες 13)



Θέμα 21300

## ΘΕΜΑ 2

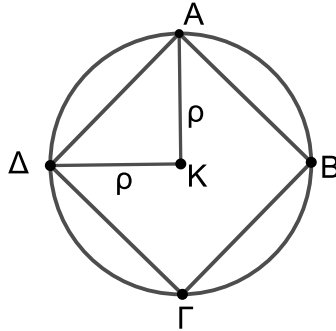
Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ , το οποίο είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο  $(K, \rho)$ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AK\Delta$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 08)

β) Αν επιπλέον το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου  $AK\Delta$  είναι 4:

i. Να αποδείξετε ότι  $\rho = \sqrt{8}$ . (Μονάδες 07)

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κύκλου  $(K, \rho)$ . (Μονάδες 10)



Θέμα 21301

## ΘΕΜΑ 2

Σε κύκλο  $(K, \rho)$  εμβαδού  $E = 4\pi$  είναι εγγεγραμμένο τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ , όπως στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε:

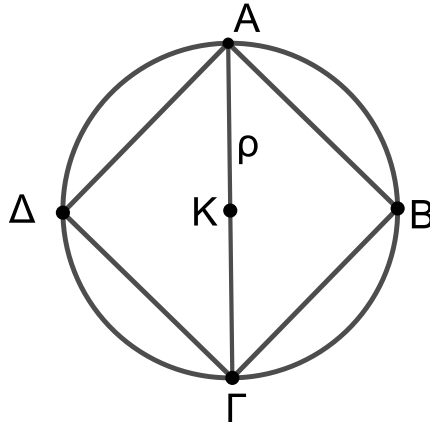
α) την ακτίνα  $\rho$  του κύκλου  $(K, \rho)$ . (Μονάδες 07)

β) το μήκος της διαμέτρου  $A\Gamma$  του κύκλου  $(K, \rho)$  και της πλευράς  $AB$  του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 10)

γ) το εμβαδόν του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 08)



Θέμα 21302

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 5$  και  $A\Delta$  το ύψος του από την κορυφή  $A$ . Αν  $B\Delta = 3$  και  $\Gamma\Delta = 8$  να αποδείξετε ότι:

α)  $A\Delta = 4$ .

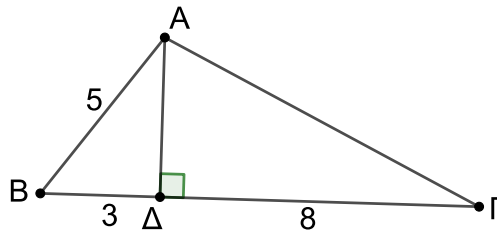
(Μονάδες 07)

β)  $A\Gamma = \sqrt{80}$ .

(Μονάδες 08)

γ) το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι αμβλυγώνιο.

(Μονάδες 10)



Θέμα 21304

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 1$ . Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  παίρνουμε σημεία  $\Delta$  και  $E$ , αντίστοιχα, ώστε η  $\Delta E$  να είναι παράλληλη στη  $B\Gamma$  και  $B\Delta = 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{1}{3}$ .

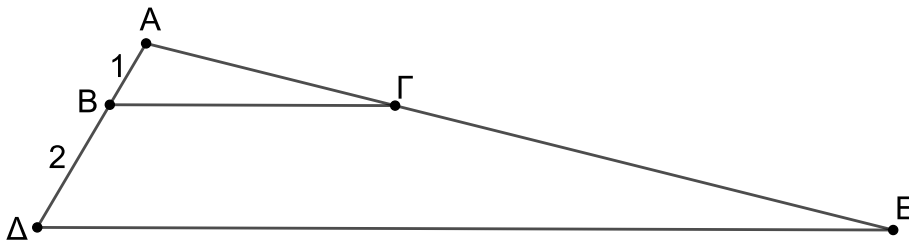
(Μονάδες 10)

β) Αν η περίμετρος του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι ίση με 8,5, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $A\Delta E$ .

(Μονάδες 08)

γ) Αν το εμβαδόν του τριγώνου  $A\Delta E$  είναι 15, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 07)



Θέμα 21350

## ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα δίνονται ότι  $\hat{B} = \hat{E} = 90^\circ$ ,  $AE = 8$ ,  $EB = 4$  και  $DE = 4$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AE\Delta$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια.

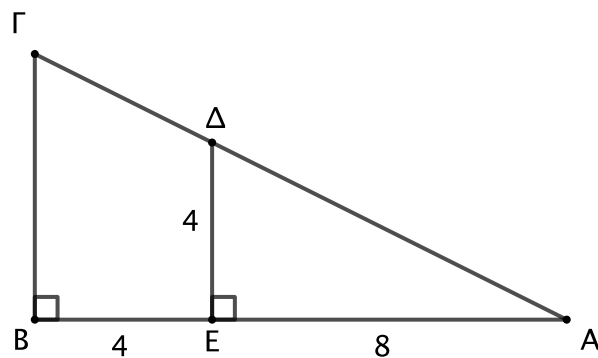
(Μονάδες 10)

β) Να γράψετε τους ίσους λόγους που προκύπτουν από την ομοιότητα των τριγώνων  $AE\Delta$  και  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $B\Gamma$ .

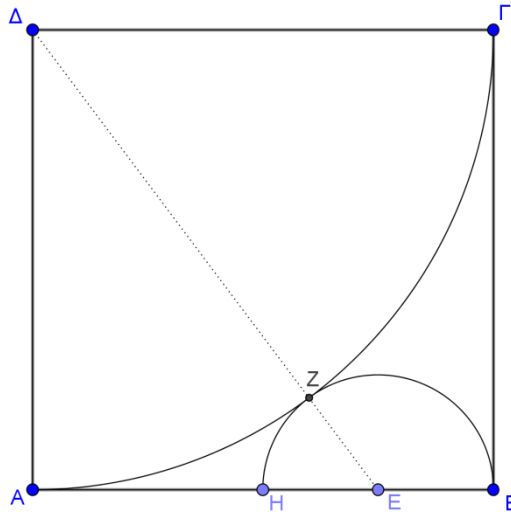
(Μονάδες 05)



Θέμα 21595

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο πλευράς 8. Με κέντρο το  $\Delta$  κατασκευάζουμε το τόξο  $A\Gamma$ . Το ημικύκλιο με διάμετρο  $BH$  εφάπτεται στο τόξο  $A\Gamma$  στο  $Z$  και το  $E$  είναι το κέντρο του ημικυκλίου.



α) Να υπολογίσετε την ακτίνα  $\rho$  του ημικυκλίου.

(Μονάδες 9)

β) Αν  $\rho=2$ , να υπολογίσετε:

i. Τα εμβαδά του τετραγώνου, του τεταρτοκυκλίου και του ημικυκλίου.

(Μονάδες 7)

ii. Την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου σχήματος  $AZ\Gamma BZHA$  που βρίσκεται εντός του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  και εκτός του ημικυκλίου και του τεταρτοκυκλίου.

(Μονάδες 9)

Θέμα 21636

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με μήκη πλευρών ΑΒ=6, ΑΓ=8, και ΒΓ=10.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 10)

β) Αν ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας

$$\lambda = \frac{3}{4}. \quad (\text{Μονάδες 10})$$

ii. Να υπολογίσετε το λόγο:  $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)}$ . (Μονάδες 5)

Θέμα 21783

## ΘΕΜΑ 3

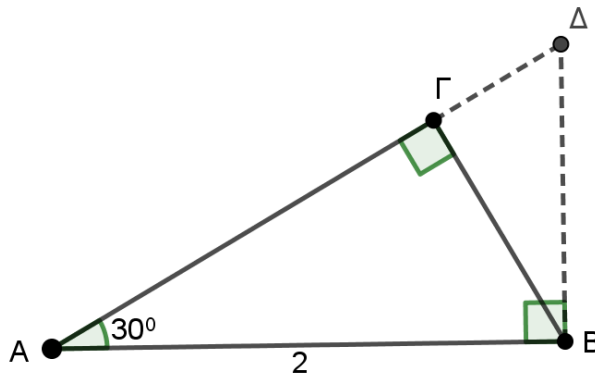
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ ,  $\hat{A} = 30^\circ$  και  $AB = 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = \sqrt{3}$ . (Μονάδες 7)

β) Φέρνουμε κάθετη στην  $AB$ , στο σημείο  $B$ , που τέμνει την προέκταση της  $A\Gamma$  στο  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ . (Μονάδες 10)

γ) Αν  $K$  είναι το μέσο της  $A\Delta$ , να αποδείξετε ότι  $(KAB) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 21823

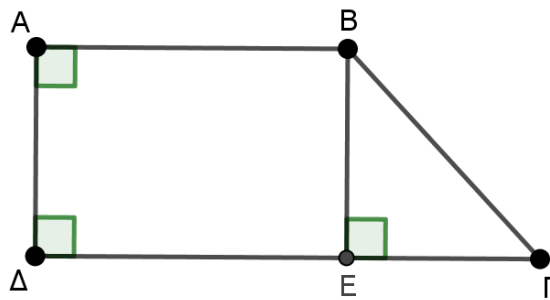
## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος, με  $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$  και  $AD = 4$ ,  $AB = 5$ ,  $\Delta\Gamma = 8$ . Από την κορυφή Β του τραpezίου, φέρνουμε την ΒΕ κάθετη στην πλευρά ΔΓ.

α) Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος ΕΓ. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ του τραpezίου. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το λόγο:  $\frac{(B\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma\Delta)}$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 21838

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $AB=8$ ,  $A\Gamma=12$  και γωνία  $\hat{A} = 60^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $(AB\Gamma)=24\sqrt{3}$ .

(Μονάδες 13)

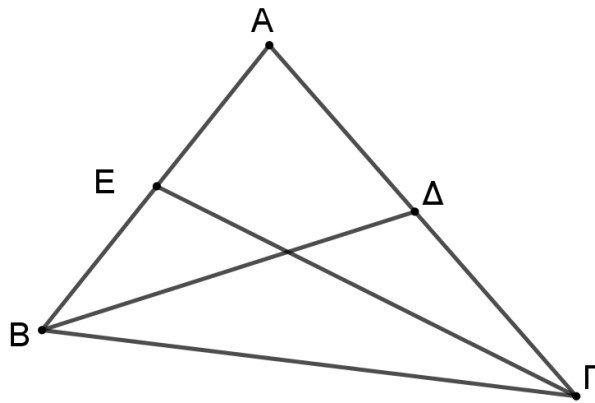
β) Αν  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  διάμεσοι του τριγώνου  $AB\Gamma$ , να αποδείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα  $BE\Gamma$  και  $AE\Gamma$  είναι ισοδύναμα.

(Μονάδες 4)

ii. Τα τρίγωνα  $EB\Gamma$  και  $\Delta\Gamma B$  είναι ισοδύναμα με  $(EB\Gamma)=(\Delta\Gamma B)=12\sqrt{3}$

(Μονάδες 8)



Θέμα 21839

## ΘΕΜΑ 4

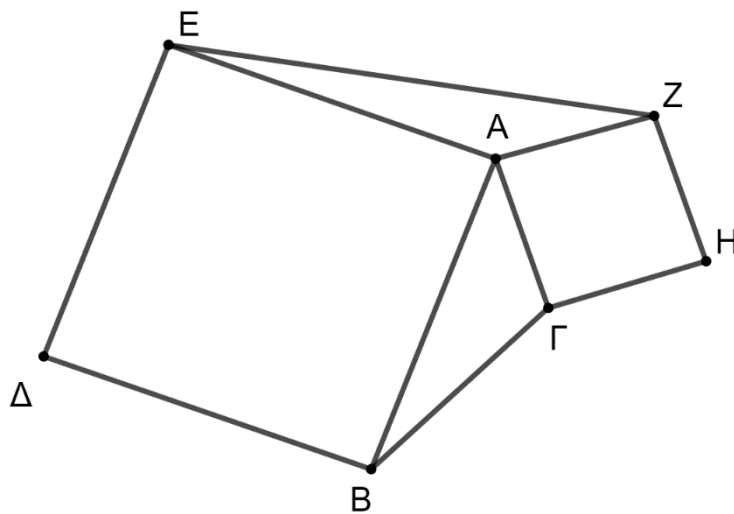
Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 6$  cm και  $A\Gamma = 3$  cm και  $\hat{A}$  οξεία. Εξωτερικά του τριγώνου με πλευρές τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα του τριγώνου  $AB\Gamma$  σχηματίζουμε τα τετράγωνα  $AB\Delta E$  και  $A\Gamma H Z$  και φέρνουμε την  $EZ$ , όπως στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AEZ$  και  $AB\Gamma$  είναι ισοδύναμα. (Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου  $EZH\Gamma B\Delta$  είναι  $(EZH\Gamma B\Delta) = 54 \text{ cm}^2$  :

i. Να αποδείξετε ότι η γωνία  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $\hat{A} = 30^\circ$ . (Μονάδες 10)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει για πλευρά την πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 5)



Θέμα 21840

ΘΕΜΑ 4

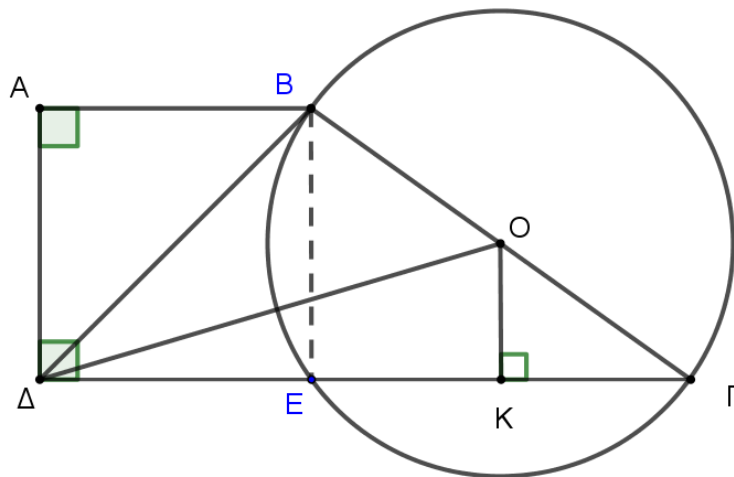
Έστω  $AB\Gamma\Delta$  τραπέζιο με  $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $AB=5$ ,  $\Gamma\Delta=13$  και εμβαδόν  $(AB\Gamma\Delta)=54$ . Ο κύκλος με διάμετρο τη  $B\Gamma$  τέμνει τη  $\Gamma\Delta$  στο σημείο  $E$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = 6$ . (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε το μήκος των  $BE$  και  $B\Gamma$ . (Μονάδες 6)

γ) Αν  $OK$  είναι η κάθετη από το σημείο  $O$  στην  $E\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $OK=3$ , και να υπολογίσετε το μήκος της  $OD$ . (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $B\Delta O$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 21841

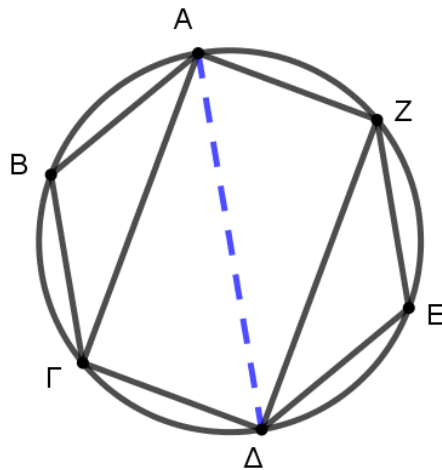
## ΘΕΜΑ 4

Έστω  $ΑΒΓΔΕΖ$  κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(Ο, R)$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. Η διαγώνιος  $ΑΔ$  του εξαγώνου είναι διάμετρος του κύκλου. (Μονάδες 6)
- ii. Οι γωνίες  $\widehat{ΓΑΔ}$  και  $\widehat{ΑΔΖ}$  είναι ίσες. (Μονάδες 3)
- iii. Οι διαγώνιοι  $ΑΓ$  και  $ΖΔ$  του εξαγώνου είναι παράλληλες. (Μονάδες 3)
- iv. Το τετράπλευρο  $ΑΓΔΖ$  είναι ορθογώνιο και να βρείτε το εμβαδόν του συναρτήσει της ακτίνας  $R$  του κύκλου. (Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι σε κάθε κανονικό πολύγωνο με περισσότερες από πέντε πλευρές υπάρχουν τουλάχιστον δύο διαγώνιοι που να είναι παράλληλες. Συμφωνείτε με την άποψη αυτού του μαθητή; Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας. (Μονάδες 6)



## ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **ΣΩΣΤΟ**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **ΛΑΘΟΣ**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Το τρίγωνο που ορίζεται από τις ευθείες δύο πλευρών τριγώνου και μία παράλληλη προς την τρίτη πλευρά του, έχει πλευρές ανάλογες προς τις πλευρές του αρχικού τριγώνου.
- ii. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε όμοια.
- iii. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.
- iv. Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ , τότε το τρίγωνο είναι πάντοτε οξυγώνιο.
- v. Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

(Μονάδες 10)

β) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

Θέμα 21979

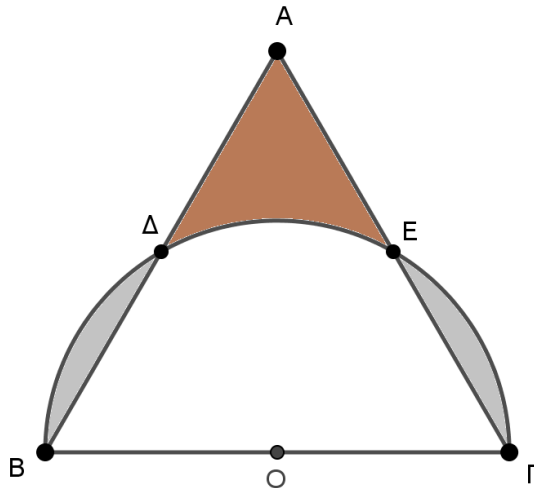
## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο, πλευράς  $2\alpha$ . Με διάμετρο τη  $B\Gamma$  γράφουμε ημικύκλιο, που τέμνει τις πλευρές  $AB$ ,  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$ ,  $E$  αντίστοιχα. Αν  $O$  είναι το κέντρο του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι:

α)  $\Delta\Gamma = \alpha\sqrt{3}$ . (Μονάδες 8)

β) το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται στο εξωτερικό του τριγώνου ισούται με  $E = \frac{(2\pi - 3\sqrt{3})\alpha^2}{6}$ . (Μονάδες 9)

γ) το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα  $A\Delta$ ,  $A\Gamma$  και το τόξο  $\Delta E$  είναι:  $E' = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)\alpha^2}{6}$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 21986

## ΘΕΜΑ 2

Στις πλευρές  $AB$  και  $AG$  τριγώνου  $AB\Gamma$  παίρνουμε σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα ώστε η  $\Delta E$  να είναι παράλληλη στην  $B\Gamma$  και  $A\Delta = 1$ , όπως στο σχήμα.

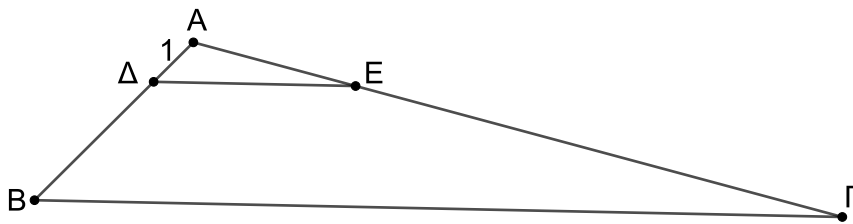
α) Να αποδείξετε ότι  $AE \cdot B\Delta = \Gamma E$ . (Μονάδες 10)

β) Αν επιπλέον  $B\Delta = AE$  και  $\Gamma E = 9$ :

i. Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = 3$  και  $AB = 4$ . (Μονάδες 10)

ii. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια και να υπολογίσετε το λόγο ομοιότητάς τους.

(Μονάδες 05)



Θέμα 21987

ΘΕΜΑ 2

Οι ευθείες ΓΘ και ΖΗ τέμνουν τις παράλληλες ευθείες  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  και  $\epsilon_3$  στα σημεία Θ, Α, Β και Η, Δ, Ε αντίστοιχα και την ευθεία  $\epsilon_4$  στα σημεία Γ και Ζ όπως στο παρακάτω σχήμα.

Επίσης δίνονται τα μήκη  $\theta A = 2$ ,  $AB = 1$ ,  $B\Gamma = H\Delta = 4$  και  $EZ = 8$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\Delta E = 2$ . (Μονάδες 10)

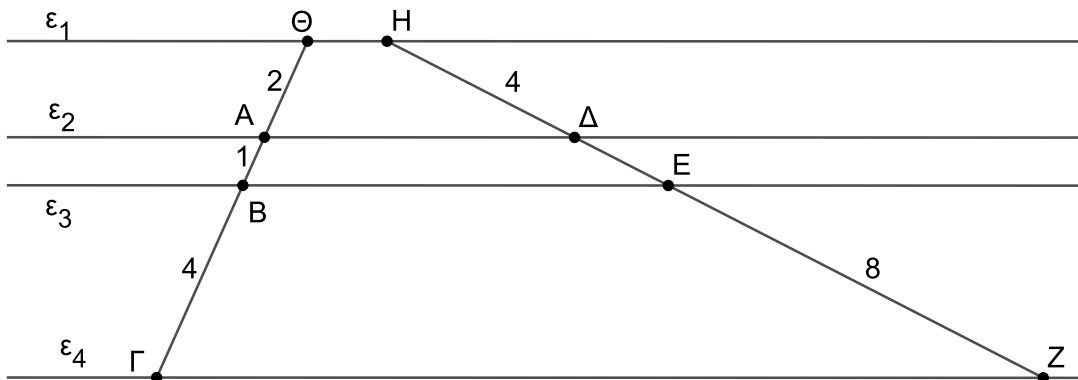
β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $\epsilon_4$  είναι παράλληλη στις ευθείες  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  και  $\epsilon_3$ .

(Μονάδες 05)

γ) Να σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα ΘΖ το οποίο τέμνει την ευθεία  $\epsilon_2$  στο Κ και την ευθεία  $\epsilon_3$  στο Λ και να υπολογίσετε τον λόγο  $\frac{\Lambda Z}{K\Lambda}$ .

(Μονάδες 10)

(Μονάδες 10)



Θέμα 22021

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{A} = 90^\circ$  και  $B\Gamma = 2\rho$ . Με διάμετρο  $B\Gamma$  γράφουμε ημικύκλιο εξωτερικά του τριγώνου. Επίσης, γράφουμε τον κυκλικό τομέα  $AB\Gamma$  με κέντρο το  $A$  και ακτίνα  $AB$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι  $AB = \rho\sqrt{2}$ .

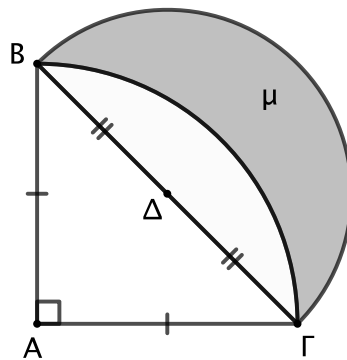
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου  $\mu$  ως συνάρτηση του  $\rho$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να συγκρίνετε το εμβαδόν του μηνίσκου  $\mu$  με το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Τι συμπέρασμα προκύπτει;

(Μονάδες 05)



Θέμα 22023

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ είναι όμοια.

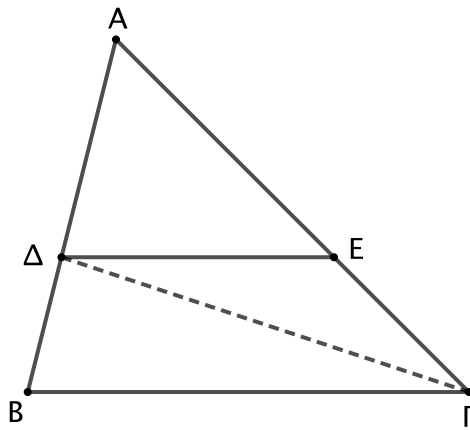
(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών  $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$  όταν το σημείο Δ είναι μέσο της ΑΒ.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη θέση του σημείου Δ ώστε  $\frac{(ΔΕΓ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{2}{9}$ .

(Μονάδες 05)



Θέμα 22024

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και τυχαίο σημείο του  $M$ , τέτοιο ώστε  $AM = 2\alpha$  και  $MB = 2\beta$ . Με διαμέτρους  $AM$ ,  $MB$  και  $AB$  γράφουμε ημικύκλια προς το ίδιο μέρος του  $AB$ , όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω  $\Gamma$  το σημείο τομής του ημικυκλίου  $AB$  και της κάθετης από το  $M$  στο  $AB$ .

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καθενός από τα τρία ημικύκλια  $Z\widehat{AM}$ ,  $E\widehat{MB}$  και  $\Delta\widehat{AB}$ , όπου  $Z$ ,  $E$ ,  $\Delta$  είναι τα μέσα των  $AM$ ,  $MB$  και  $AB$  αντίστοιχα.

(Μονάδες 09)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν καμπυλόγραμμου σχήματος  $\tau$  που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων.

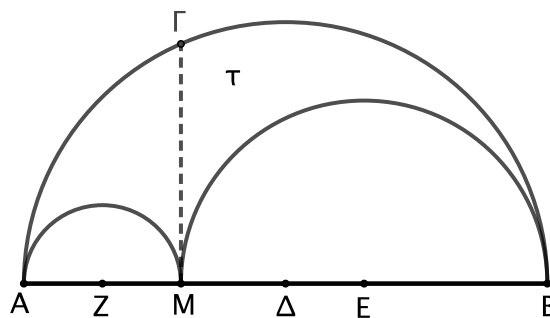
(Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι το καμπυλόγραμμο σχήμα  $\tau$  που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων έχει το ίδιο εμβαδόν με τον κύκλο διαμέτρου  $M\Gamma$ .

(Μονάδες 05)

δ) Για ποια θέση του  $M$  μεγιστοποιείται το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου σχήματος  $\tau$ ;

(Μονάδες 05)



Θέμα 22032

## ΘΕΜΑ 2

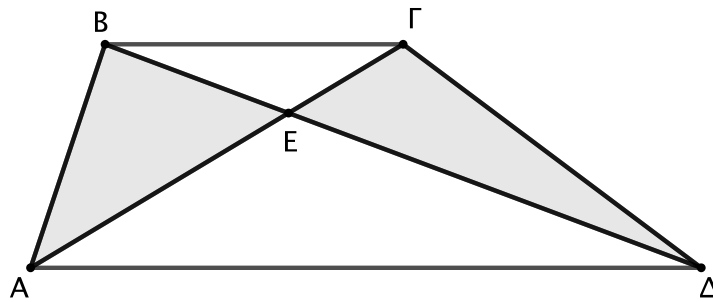
Θεωρούμε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $B\Gamma // A\Delta$ ) και έστω  $E$  το σημείο τομής των διαγωνίων του  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ισοδύναμα.

(Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων τριγώνων  $ABE$  και  $\Delta\Gamma E$ .

(Μονάδες 12)



Θέμα 22035

## ΘΕΜΑ 2

Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ του σχήματος παριστάνει την κάτοψη ενός κτήματος με  $AB = 60 \text{ m}$ ,  $B\Gamma = 80 \text{ m}$ ,  $\hat{\Delta} = 60^\circ$ ,  $\hat{B} = 90^\circ$  και  $AD = \Gamma\Delta$ .

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ.

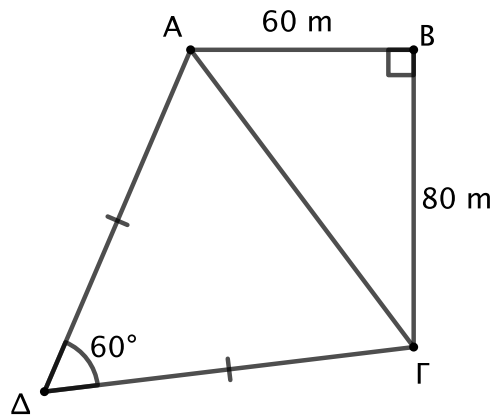
(Μονάδες 09)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 04)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΓ. Πόσο είναι το συνολικό εμβαδόν του κτήματος;

(Μονάδες 12)



Θέμα 22046

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R = 1$ . Θεωρούμε ακτίνα  $OA$  την οποία προεκτείνουμε κατά τμήμα  $AB = OA = R$  και το εφαπτόμενο τμήμα  $BA$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{OBA} = 30^\circ$ .

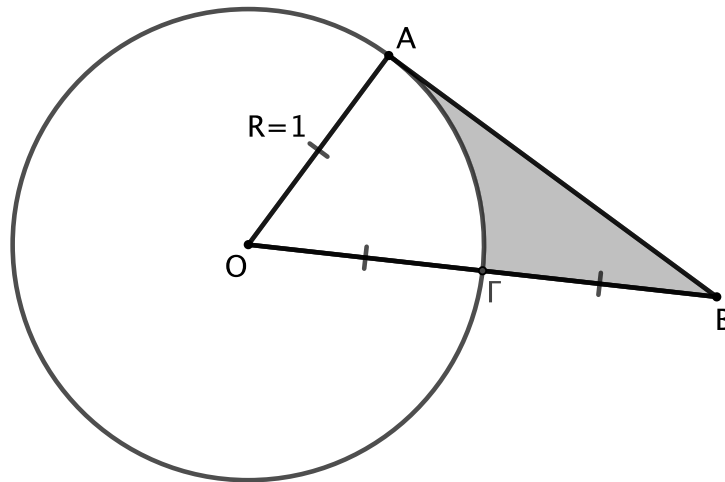
(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι  $AB = \sqrt{3}$ .

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 10)



Θέμα 22054

## ΘΕΜΑ 3

Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  πλευράς  $2\alpha$ . Με κέντρα τις κορυφές του τετραγώνου και ακτίνα  $\alpha$  σχεδιάζουμε τέσσερις κυκλικούς τομείς στο εσωτερικό του όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν κάθε κυκλικού τομέα ως συνάρτηση του  $\alpha$ .

(Μονάδες 08)

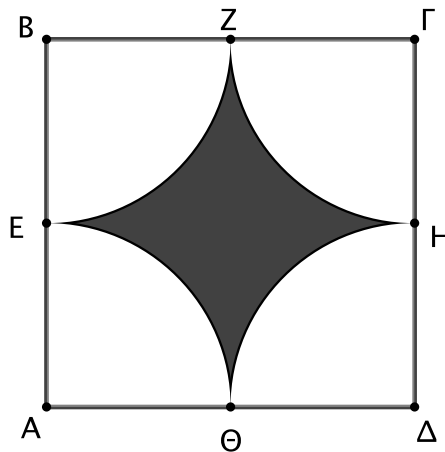
β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου είναι:

$$E = \alpha^2(4 - \pi)$$

(Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου χωρίου.

(Μονάδες 05)



Θέμα 22058

## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε κύκλο με κέντρο  $\Gamma$  και ακτίνα  $R$ . Έστω  $AB$  διάμετρος του κύκλου και  $\Delta, E$  σημεία της τέτοια ώστε  $A\Delta = \Delta E = EB$ . Σχεδιάζουμε τα ημικύκλια  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  πάνω από τη διάμετρο  $AB$  και τα ημικύκλια  $BE$  και  $B\Gamma$  κάτω από τη διάμετρο  $AB$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_3$  των καμπυλόγραμμων σχημάτων  $A\Delta BZ$  και  $BEAH$  αντίστοιχα.

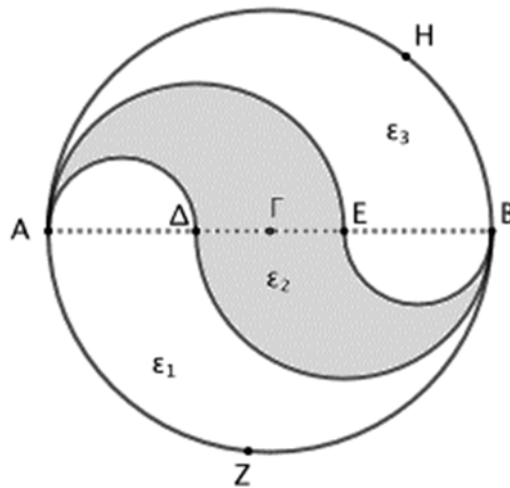
(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν  $\epsilon_2$  του γραμμοσκιασμένου καμπυλόγραμμου σχήματος  $A\Delta BE$ .

(Μονάδες 08)

γ) Να εξετάσετε αν ο κύκλος χωρίζεται σε τρία ισοδύναμα καμπυλόγραμμα σχήματα.

(Μονάδες 05)



Θέμα 22070

## ΘΕΜΑ 2

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει μήκη πλευρών  $\alpha = 17$ ,  $\beta = 8$ ,  $\gamma = 15$ .

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ:

i. Να δικαιολογήσετε γιατί τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους λ.

ii. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών  $\frac{(ΑΒΔ)}{(ΑΓΔ)}$ .

(Μονάδες 12)

Θέμα 22098

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο με  $AB = 4\alpha$  και  $A\Delta = \pi\alpha$ . Στο εσωτερικό του ορθογώνιου σχεδιάστηκε ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$ .

α) Να αποδείξετε ότι το ημικύκλιο χωρίζει το ορθογώνιο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

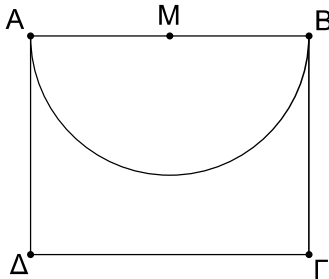
(Μονάδες 8)

β) Αν η διαγώνιος  $B\Delta$  τέμνει το ημικύκλιο στο σημείο  $E$  και  $M$  είναι το μέσο της  $AB$ ,

i. να αποδείξετε ότι  $AB^2 = B\Delta \cdot BE$  και  $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta E$ . (Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι  $BE = \frac{16\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$  και  $\Delta E = \frac{\pi^2\alpha}{\sqrt{16+\pi^2}}$ , (Μονάδες 6)

iii. να υπολογίσετε το  $\widehat{BME}$ . (Μονάδες 5)



Θέμα 22099

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και σημείο Μ στο εσωτερικό του. Έστω  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $(ABM) = \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot MM_1$ , όπου  $\lambda_5$  είναι η πλευρά του κανονικού πενταγώνου.

(Μονάδες 6)

ii.  $(ABΓΔΕ) = \frac{1}{2} \cdot \lambda_5 \cdot (MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5)$ .

(Μονάδες 7)

iii.  $MM_1 + MM_2 + MM_3 + MM_4 + MM_5 = 5\alpha_5$ , όπου  $\alpha_5$  είναι το απόστημα του κανονικού πενταγώνου.

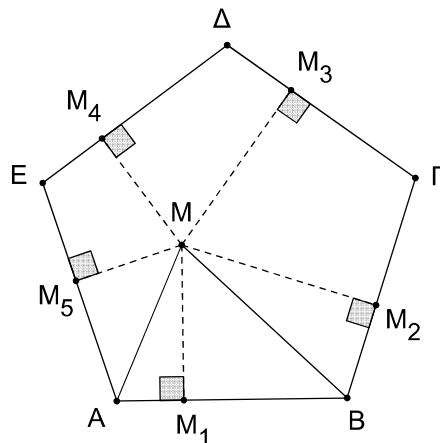
(Μονάδες 7)

β) Ένας μαθητής διατύπωσε τον ισχυρισμό: «Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός κανονικού ν-γώνου  $A_1A_2\dots A_n$  και  $M_1, M_2, \dots, M_n$  είναι οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  αντίστοιχα, τότε

$$MM_1 + MM_2 + \dots + MM_n = n\alpha_n,$$

όπου  $\alpha_n$  είναι το απόστημα του κανονικού ν-γώνου». Να αποδείξετε ότι ο ισχυρισμός του μαθητή είναι σωστός.

(Μονάδες 5)



Θέμα 22100

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με γωνίες  $\hat{A} = 20^\circ$ ,  $\hat{B} = 100^\circ$ , και η διχοτόμος  $AE$  της γωνίας του  $\hat{A}$ . Από το  $B$  φέρνουμε την κάθετη προς την  $AE$  και έστω  $Z$ ,  $\Delta$  τα σημεία τομής της καθέτου με τις  $AE$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

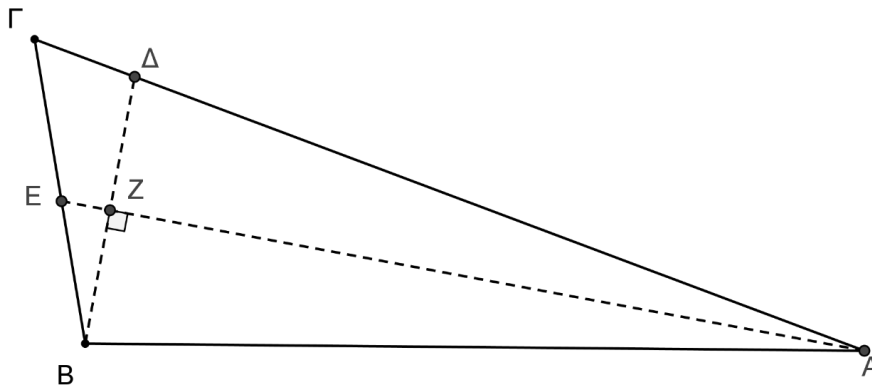
i.  $\Gamma\hat{B}\Delta = \hat{A} = 20^\circ$  (Μονάδες 10)

ii. Το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι όμοιο με το τρίγωνο  $AB\Gamma$ , να γράψετε τα ζεύγη των ομόλογων πλευρών τους και να αιτιολογήσετε γιατί είναι αυτές οι πλευρές ομόλογες .

(Μονάδες 10)

β) Να σχεδιάσετε εξωτερικά του τριγώνου  $AB\Gamma$  δύο τετράπλευρα: ένα τετράγωνο με πλευρά την  $B\Gamma$  και ένα ορθογώνιο που η μία του πλευρά είναι η πλευρά  $A\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και η άλλη του πλευρά είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα  $\Gamma\Delta$ . Να εξετάσετε αν τα δυο τετράπλευρα, που σχεδιάσατε, έχουν ίσα εμβαδά.

(Μονάδες 5)



Θέμα 22101

## ΘΕΜΑ 4

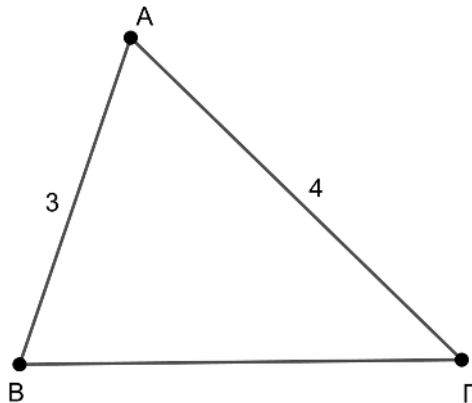
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι πλευρές ΑΒ και ΑΓ έχουν σταθερά μήκη 3 και 4 αντίστοιχα.

α) Αν η γωνία Α έχει μέτρο  $60^\circ$ , τότε να υπολογίσετε:

- i. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 08)
- ii. Το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 09)

β) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας Α ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να γίνεται μέγιστο; Να υπολογίσετε το μέγιστο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 08)



Θέμα 22102

## ΘΕΜΑ 4

Για να βρει το ύψος ενός δέντρου, ένας μαθητής ύψους 1,60 m σκέφτηκε να μετρήσει το μήκος της σκιάς του δέντρου και το μήκος της δικιάς του σκιάς πάνω στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο κάποια χρονική στιγμή μιας ηλιόλουστης ημέρας. Στέκεται σε θέση έτσι ώστε, η άκρη της σκιάς του να συμπίπτει με την άκρη της σκιάς του δέντρου. Ο μαθητής μετράει και βρίσκει ότι η σκιά του έχει μήκος 2m και η σκιά του δέντρου ότι έχει μήκος 5m.

Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα τμήματα  $OA$  και  $OG$ , με κοινό άκρο  $O$ , αναπαριστούν τα μήκη των σκιών του μαθητή και του δέντρου αντίστοιχα και έχουν τον ίδιο φορέα  $OG$ , τα δε τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αναπαριστούν τα αντίστοιχα ύψη μαθητή και δέντρου και θεωρούνται κάθετα στην  $OG$ .

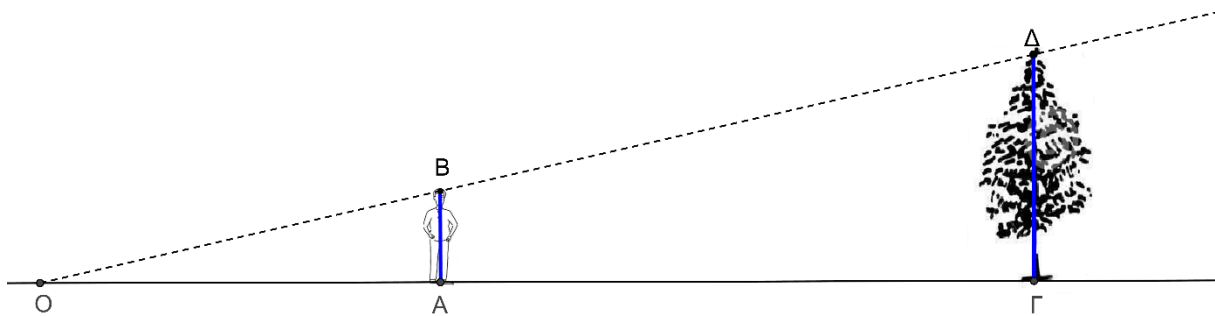
α)

i. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AOB$  και  $\Gamma O\Delta$  είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητάς τους. (Μονάδες 12)

ii. Να βρείτε το ύψος του δέντρου. (Μονάδες 8)

β) Μπορεί ο μαθητής να χρησιμοποιήσει την ίδια μέθοδο για να μετρήσει το ύψος του ίδιου δέντρου μια άλλη ώρα της ημέρας; Ποια από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος θα άλλαζαν στην περίπτωση αυτή; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(Μονάδες 5)



(σημειώνεται ότι τα σχέδια δεν έχουν γίνει υπό κλίμακα)

Θέμα 22104

## ΘΕΜΑ 4

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  εσωτερικό της πλευράς του  $B\Gamma$ . Έστω  $M$  το μέσο  $M$  του τμήματος  $A\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $(ABM) = \frac{1}{2} (AB\Delta)$  (Μονάδες 8)

ii.  $(ABM) + (M\Delta\Gamma) = \frac{1}{2} (AB\Gamma)$  (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου  $\Delta$  τέτοια ώστε τα τρίγωνα  $ABM$  και  $M\Delta\Gamma$  να έχουν ίσα εμβαδά. Στην περίπτωση που υπάρχει θέση του σημείου  $\Delta$  για την οποία τα εμβαδά των τριγώνων  $ABM$  και  $M\Delta\Gamma$  είναι ίσα, να βρείτε τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι το εμβαδόν του κάθε τριγώνου  $ABM$  και  $M\Delta\Gamma$ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

Θέμα 22130

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας  $R$ . Αν οι πλευρές του τριγώνου είναι  $B\Gamma = \alpha$ ,  $A\Gamma = \beta$  και  $AB = \gamma$ , τότε να αποδείξετε ότι:

α)  $\alpha = 2R$ .

(Μονάδες 12)

β)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8R^2$ .

(Μονάδες 13)

Θέμα 22132

## ΘΕΜΑ 2

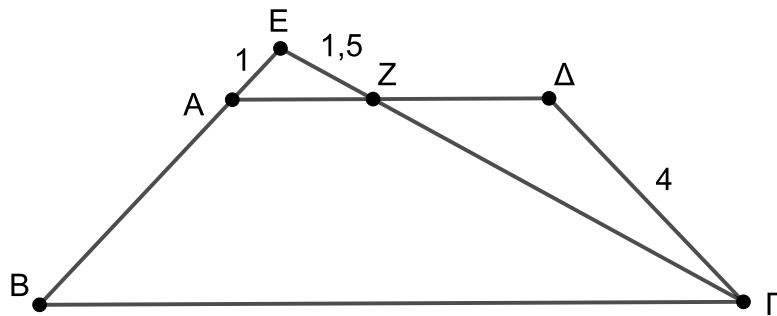
Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = \Gamma\Delta = 4$  και με βάσεις  $A\Delta$  και  $B\Gamma$ . Στην προέκταση της πλευράς  $BA$  προς το  $A$  παίρνουμε σημείο  $E$ , ώστε  $EA = 1$ . Το ευθύγραμμο τμήμα  $E\Gamma$  τέμνει την  $A\Delta$  στο σημείο  $Z$  και  $EZ = 1,5$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $Z\Gamma = 1,5AB$ . (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το μήκος του  $Z\Gamma$ . (Μονάδες 05)

γ) Αν επιπλέον  $B\Gamma = 10$ , να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς  $AZ$  του τριγώνου  $EAZ$ .

(Μονάδες 10)



Θέμα 22141

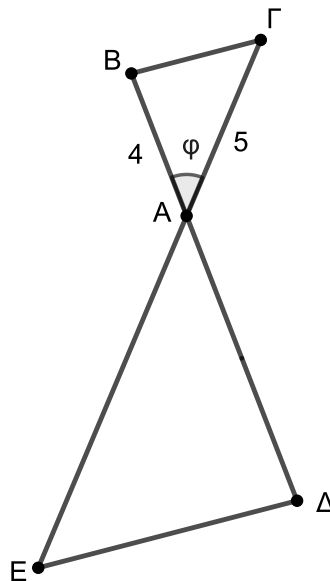
## ΘΕΜΑ 4

Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ έχει τα άκρα του Β και Γ στις προεκτάσεις των πλευρών ΔΑ και ΕΑ, αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΔΕ, έτσι ώστε να είναι παράλληλο στην πλευρά ΔΕ. Επίσης δίνονται τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ,  $AB = 4$  και  $AG = 5$ . Έστω ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι  $\frac{(AB\Gamma)}{(ADE)} = \frac{1}{4}$ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια με λόγο  $\frac{1}{2}$ . (Μονάδες 10)

β) Αν  $B\hat{A}G = \varphi$ , να αποδείξετε ότι το εμβαδόν (ΑΔΕ) του τριγώνου ΑΔΕ είναι ίσο με  $40\eta\mu\varphi$ .  
(Μονάδες 07)

γ) Να βρείτε σημείο Ζ εσωτερικό της πλευράς ΑΔ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΖ που σχηματίζεται να είναι ίσο με το  $\frac{1}{4}$  του εμβαδού του τριγώνου ΑΔΕ. (Μονάδες 08)



Θέμα 22148

ΘΕΜΑ 4

Έστω  $E$  σημείο στην πλευρά  $GA$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Από το  $E$  φέρνουμε παράλληλη στην πλευρά  $B\Gamma$  του  $AB\Gamma$  η οποία τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$  και παίρνουμε σημείο  $Z$  στην προέκταση  $A\chi$  της πλευράς  $GA$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  ώστε να είναι  $AZ = AE$ , όπως στο σχήμα.

α) Έστω  $A\Gamma = 3AE$ . Να αποδείξετε ότι:

i. Το εμβαδόν του τριγώνου  $A\Delta E$  είναι ίσο με το  $\frac{1}{9}$  του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 07)

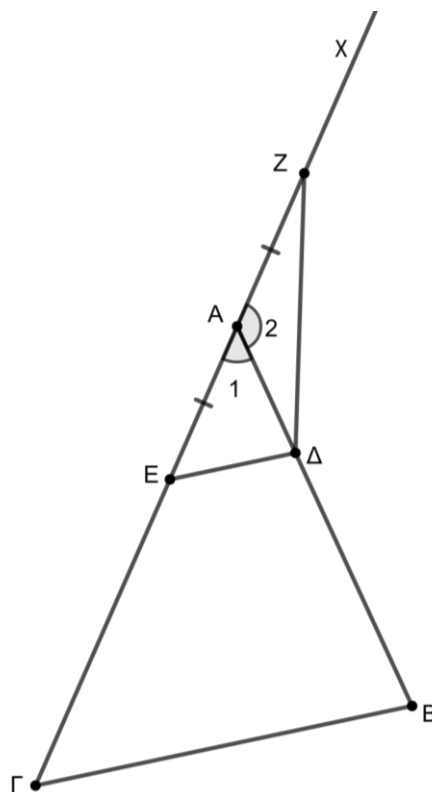
ii. Το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta EZ$  είναι ίσο με τα  $\frac{2}{9}$  του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του  $\Delta EZ$  είναι ίσο με το  $\frac{1}{2}$  του εμβαδού του  $AB\Gamma$ , να υπολογίσετε το λόγο

$$\frac{AE}{A\Gamma}.$$

(Μονάδες 08)



Θέμα 22150

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $E$  και  $Z$  τα μέσα των πλευρών του  $A\Gamma$  και  $AB$ , αντίστοιχα.

α) Αν επιπλέον το ευθύγραμμο τμήμα  $A\Delta$  ενώνει την κορυφή  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και το μέσο  $\Delta$  της απέναντι πλευράς  $B\Gamma$ , όπως στο σχήμα, να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα  $E\Delta\Gamma$  και  $AB\Gamma$  είναι όμοια με λόγο ομοιότητας  $\frac{1}{2}$ .

ii. Για το εμβαδόν  $(AE\Delta Z)$  του τετραπλεύρου  $AE\Delta Z$  ισχύει ότι  $(AE\Delta Z) = (AB\Gamma) - 2(E\Delta\Gamma)$ .

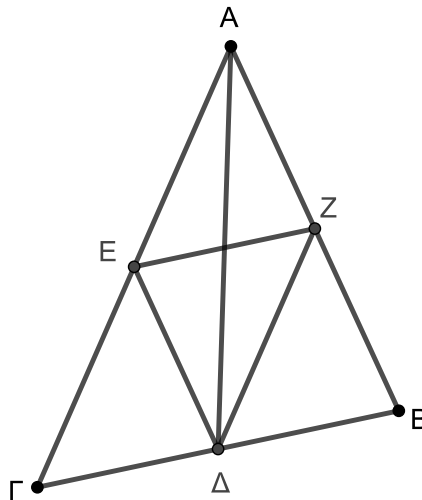
iii. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AE\Delta Z$  είναι ίσο με το  $\frac{1}{2}$  του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 18)

β) Αν το σημείο  $\Delta$  είναι τυχαίο εσωτερικό σημείο της πλευράς  $B\Gamma$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , τότε ισχύει ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου  $AE\Delta Z$  είναι ίσο με το  $\frac{1}{2}$  του εμβαδού του τριγώνου

 $AB\Gamma$ ;

(Μονάδες 07)



Θέμα 22151

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Στην πλευρά  $AB$  παίρνουμε σημείο  $\Delta$  και στην πλευρά  $A\Gamma$  σημείο  $E$  ώστε  $AE = AB$ . Με κέντρο το σημείο  $A$  και ακτίνες  $\rho = A\Delta$ ,  $r = AB = AE$  και  $R = A\Gamma$  γράφουμε τρεις ομόκεντρους κύκλους  $(A, \rho)$ ,  $(A, r)$  και  $(A, R)$  όπως στο σχήμα. Έστω  $E_{E\Gamma}$  το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων  $(A, r)$  και  $(A, R)$ ,  $E_{\Delta B}$  το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων  $(A, \rho)$  και  $(A, r)$ ,  $E_{AE}$  το εμβαδόν του κύκλου  $(A, r)$  και  $E_{A\Delta}$  το εμβαδόν του κύκλου  $(A, \rho)$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

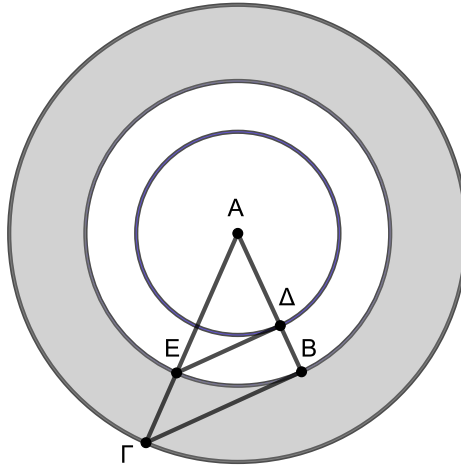
$$\text{i. } \frac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \frac{R^2 - r^2}{r^2} \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

$$\text{ii. } \frac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}} = \frac{r^2 - \rho^2}{\rho^2} \quad (\text{Μονάδες } 07)$$

β) Αν επιπλέον οι  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{E_{E\Gamma}}{E_{AE}} = \frac{E_{\Delta B}}{E_{A\Delta}}$$

(Μονάδες 08)



Θέμα 22154

## ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A\Delta E$ , που η κοινή κορυφή τους  $A$  βρίσκεται στο κέντρο τριών ομόκεντρων κύκλων  $(A, \rho_1)$ ,  $(A, \rho_2)$  και  $(A, \rho_3)$ , η κορυφή  $\Gamma$  βρίσκεται στον κύκλο  $(A, \rho_3)$ , οι κορυφές  $B$  και  $E$  στον κύκλο  $(A, \rho_2)$  και η κορυφή  $\Delta$  στον κύκλο  $(A, \rho_1)$ , όπως στο σχήμα, με  $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ . Ονομάζουμε  $E_{E\Gamma}$  το εμβαδόν του σκιασμένου δακτυλίου μεταξύ των κύκλων  $(A, \rho_2)$  και  $(A, \rho_3)$ ,  $E_1$  το εμβαδόν του κύκλου  $(A, \rho_1)$ ,  $E_2$  το εμβαδόν του κύκλου  $(A, \rho_2)$  και  $E_3$  το εμβαδόν του κύκλου  $(A, \rho_3)$ .

α) Αν  $\frac{E_{E\Gamma}}{E_2} = \frac{7}{9}$ , να αποδείξετε ότι:

i.  $\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{3}{4}$ . (Μονάδες 07)

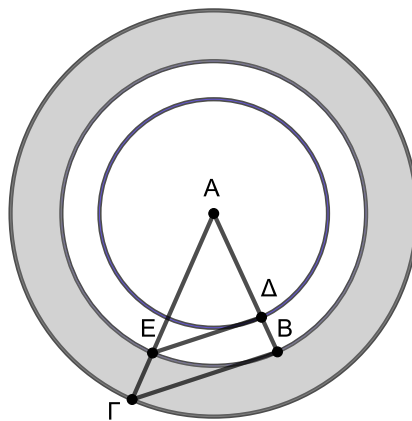
ii.  $\frac{E_2}{E_3} = \frac{9}{16}$ . (Μονάδες 05)

iii. Αν επιπλέον οι  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  είναι παράλληλες να αποδείξετε ότι  $\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{3}{4}$ .

(Μονάδες 08)

β) Αν  $E_{E\Gamma} = E_2$  και επιπλέον οι  $\Delta E$  και  $B\Gamma$  είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι  $E_{\Delta B} = E_1$ , όπου  $E_{\Delta B}$  είναι το εμβαδόν του δακτυλίου μεταξύ των κύκλων  $(A, \rho_1)$  και  $(A, \rho_2)$ .

(Μονάδες 05)



Θέμα 22243

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ζ στην πλευρά ΑΔ, ώστε  $AZ = \frac{3}{4}AB$ .

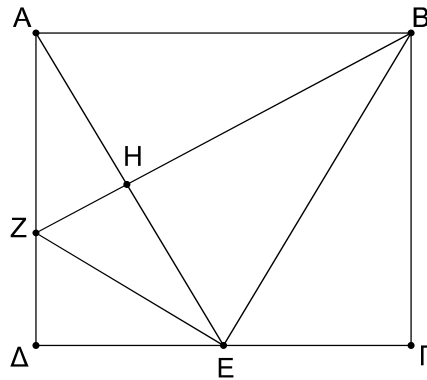
α) Να αποδείξετε ότι  $BZ = \frac{5}{4}AB$ . (Μονάδες 6)

β) Αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, Ε το μέσο της ΓΔ και Η είναι το σημείο τομής των ΑΕ, ΒΖ, να αποδείξετε ότι:

i.  $BE^2 = \frac{5}{4}AB^2$  και  $ZE^2 = \frac{5}{16}AB^2$ , (Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΕΖ και ΒΓΕ είναι όμοια και να υπολογίσετε τον λόγο των εμβαδών τους. (Μονάδες 8)



Θέμα 22244

## ΘΕΜΑ 4

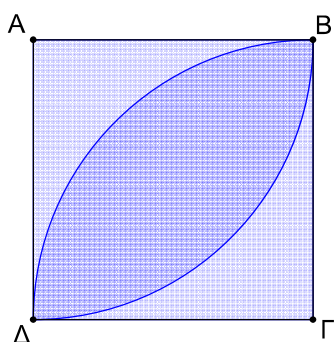
Ένας κηπουρός θέλει να ποτίσει το γκαζόν που έχει φυτέψει σε έναν τετράγωνο κήπο πλευράς 10 m. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιεί μηχανισμούς ποτίσματος τους οποίους μπορεί να ρυθμίσει, ώστε να ποτίζουν έναν κυκλικό τομέα με συγκεκριμένη γωνία και ακτίνα.

α) Ο κηπουρός τοποθετεί στις απέναντι κορυφές Α, Γ του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 10m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1. Να αποδείξετε ότι:

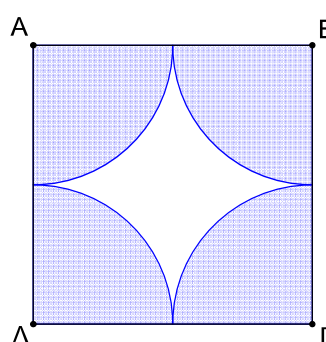
- i. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζει κάθε μηχανισμός είναι  $25\pi \text{ m}^2$ . (Μονάδες 4)
- ii. το εμβαδόν της περιοχής που ποτίζουν ταυτόχρονα και οι δύο μηχανισμοί είναι  $50(\pi - 2) \text{ m}^2$ . (Μονάδες 5)

β) Ο κηπουρός τοποθετεί στις τέσσερις κορυφές του τετράγωνου κήπου από έναν μηχανισμό, ώστε ο καθένας να ποτίζει ένα τεταρτοκύκλιο ακτίνας 5m, όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.

- i. Να βρείτε το εμβαδόν της περιοχής που δεν ποτίζεται. (Μονάδες 8)
- ii. Για να μην μείνει απότιστη κάποια περιοχή του κήπου ο κηπουρός τοποθετεί έναν πέμπτο μηχανισμό ποτίσματος στο κέντρο του κήπου ο οποίος ποτίζει την περιοχή ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας 5m. Να βρείτε το εμβαδόν του κήπου που ποτίζεται από δύο μηχανισμούς ταυτόχρονα και να το συγκρίνετε με την απάντηση που βρήκατε στο ερώτημα α). (Μονάδες 8)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Θέμα 22248

## ΘΕΜΑ 2

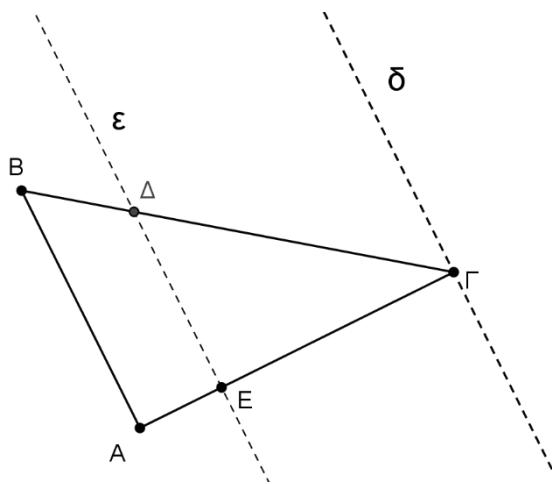
Θεωρούμε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 9$ ,  $\Gamma A = 12$  και  $\Gamma B = 15$  και ευθείες  $\varepsilon$ ,  $\delta$  παράλληλες στην  $AB$ , όπως αυτές του σχήματος.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και να βρείτε ποια πλευρά είναι η υποτεινούσά του. (Μονάδες 8)

β) Αν η ευθεία ( $\varepsilon$ ) τέμνει τις πλευρές  $\Gamma A$ ,  $\Gamma B$  σε σημεία  $E$  και  $\Delta$  αντίστοιχα έτσι ώστε  $EA = 4$  και η ευθεία ( $\delta$ ) διέρχεται από το σημείο  $\Gamma$ , τότε να υπολογίσετε

i. το τμήμα  $\Delta B$ , (Μονάδες 8)

ii. τις πλευρές του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ . (Μονάδες 9)



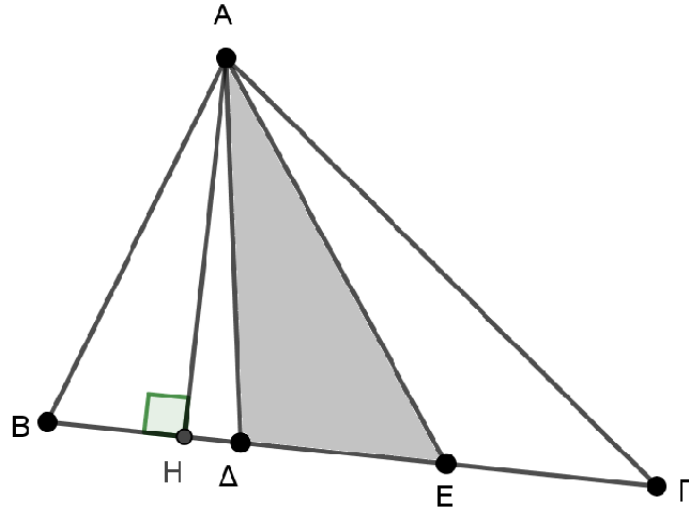
Θέμα 22259

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στην πλευρά του  $B\Gamma$ , τα σημεία  $\Delta, E$  ώστε  $B\Delta = \Delta E = E\Gamma$ . Από την κορυφή  $A$ , φέρνουμε το ύψος  $AH$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $(A\Delta E) = \frac{1}{3} (AB\Gamma)$ . (Μονάδες 13)

β) Αν  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $(AME) = \frac{1}{6} (AB\Gamma)$ . (Μονάδες 12)



Θέμα 22260

## ΘΕΜΑ 2

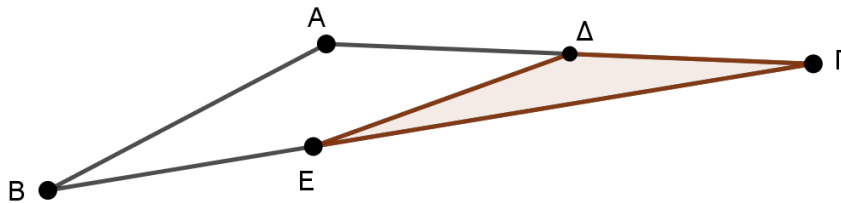
Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ του παρακάτω σχήματος, με  $AB=4$ ,  $AG=6$  και  $\widehat{A} = 150^\circ$ . Αν το σημείο Δ είναι το μέσον της ΑΓ και το Ε είναι σημείο της ΒΓ ώστε  $GE = \frac{2}{3}GB$ , τότε να

υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται  $\eta\mu 150^\circ = \frac{1}{2}$ . (Μονάδες 9)

β) το λόγο  $\frac{(ΓΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ . (Μονάδες 9)

γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΕ. (Μονάδες 7)



Θέμα 22261

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) με ΑΒ= γ, ΑΓ= β και

$B\Gamma = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma}$ . Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο με  $\hat{A} > 90^\circ$ . (Μονάδες 8)

β) η γωνία Α του τριγώνου ΑΒΓ ισούται με  $120^\circ$ . Δίνεται  $\sin 120^\circ = \frac{1}{2}$ . (Μονάδες 5)

γ) η γωνία ΒΟΓ ισούται με  $120^\circ$ . (Μονάδες 5)

δ) το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος, που ορίζεται από τη χορδή ΒΓ και το

κυρτογώνιο τόξο ΒΓ, είναι:  $E = \frac{(4\pi - 3\sqrt{3})R^2}{12}$ . Δίνεται  $\eta\mu 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . (Μονάδες 7)

Θέμα 22310

## ΘΕΜΑ 2

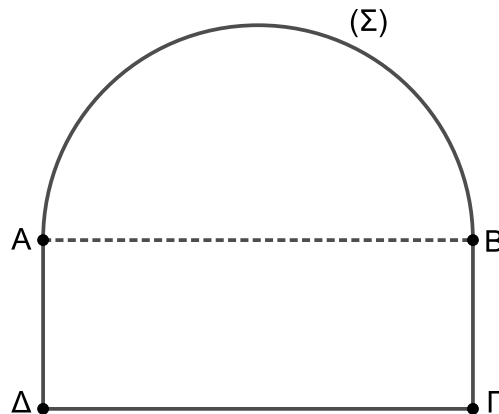
Το παρακάτω σχήμα ( $\Sigma$ ) αποτελείται από το ημικύκλιο διαμέτρου  $AB$  και το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$ . Το ημικύκλιο και το ορθογώνιο έχουν ίσα εμβαδά. Δίνεται  $AB = 8 \text{ cm}$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. το εμβαδόν του ημικυκλίου είναι  $E = 8\pi \text{ cm}^2$ , (Μονάδες 8)
- ii. το μήκος του ημικυκλίου είναι  $L = 4\pi \text{ cm}$ . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε:

- i. το μήκος της πλευράς  $A\Delta$  του ορθογωνίου, (Μονάδες 5)
- ii. την περίμετρο του σχήματος ( $\Sigma$ ). (Μονάδες 4)



Θέμα 22331

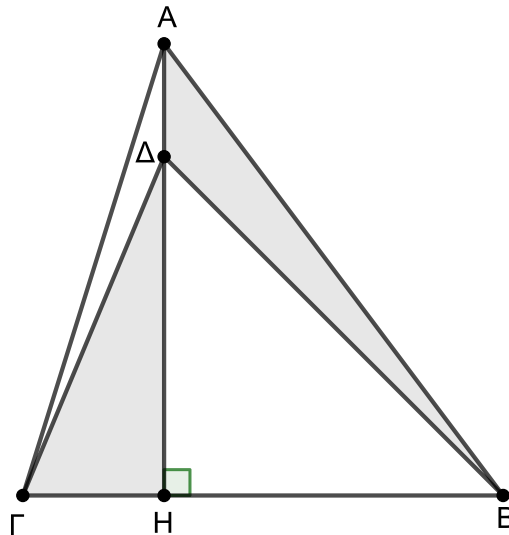
## ΘΕΜΑ 2

Στο τρίγωνο  $AB\Gamma$  του σχήματος το  $AH$  είναι ύψος και το  $\Delta$  σημείο του  $AH$ . Δίνονται  $AB = 20$ ,  $BH = 12$ ,  $\Gamma H = 5$  και ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Delta$  είναι  $(AB\Delta) = 24$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $AH = 16$ . (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = 4$ . (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $\Gamma\Delta H$ . (Μονάδες 6)



Θέμα 22338

## ΘΕΜΑ 2

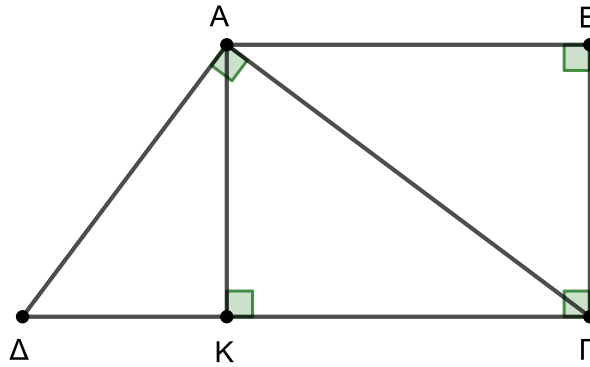
Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$  και στο οποίο η πλευρά  $A\Delta$  και η διαγώνιος  $A\Gamma$  είναι κάθετες. Έστω  $K$  η προβολή της κορυφής  $A$  στην πλευρά  $\Gamma\Delta$ ,  $K\Delta = 9$  και  $K\Gamma = 16$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $AK = 12$ .

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τραapeζίου  $AB\Gamma\Delta$ .

(Μονάδες 13)



Θέμα 22339

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και έστω  $\Delta$  η προβολή της κορυφής  $A$  στην υποτείνουσα  $B\Gamma$ . Έστω επίσης  $AB = 15$  και  $\Delta B = 9$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $B\Gamma = 25$ ,

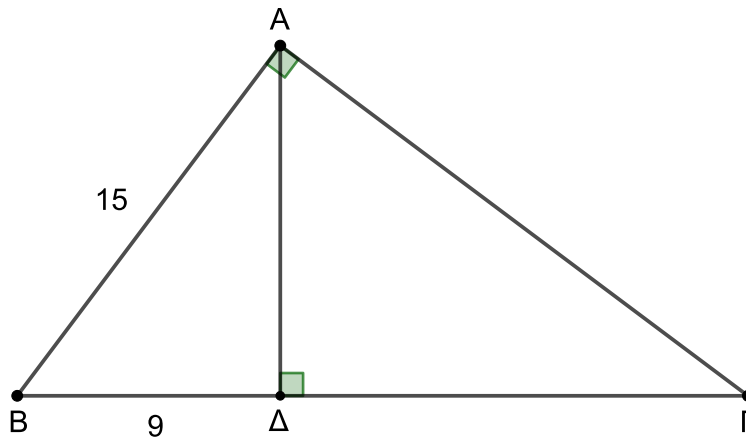
(Μονάδες 9)

ii.  $A\Gamma = 20$ .

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 7)



Θέμα 22340

## ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το εσωτερικό σημείο  $K$  της πλευράς  $B\Gamma$ . Θεωρούμε σημείο  $O$  του ευθύγραμμου τμήματος  $AK$ , ώστε  $AO = \frac{3}{4}AK$ . Από το  $O$  φέρνουμε ευθεία  $\varepsilon$  η οποία τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

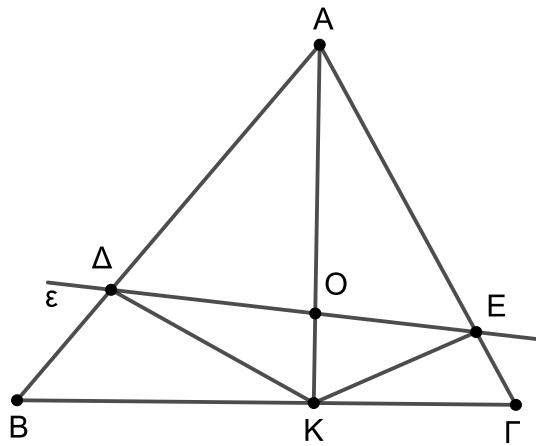
i.  $(AO\Delta) = \frac{3}{4}(AK\Delta)$ , (Μονάδες 7)

ii.  $(AOE) = \frac{3}{4}(AKE)$ , (Μονάδες 7)

iii.  $(A\Delta E) = \frac{3}{4}(A\Delta KE)$ . (Μονάδες 7)

β) Είναι δυνατόν να ισχύει  $(A\Delta E) = \frac{3}{4}(AB\Gamma)$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)



Θέμα 22369

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 8$ ,  $B\Gamma = 7$  και  $\hat{A} = 60^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = 3$  ή  $A\Gamma = 5$ . (Μονάδες 6)

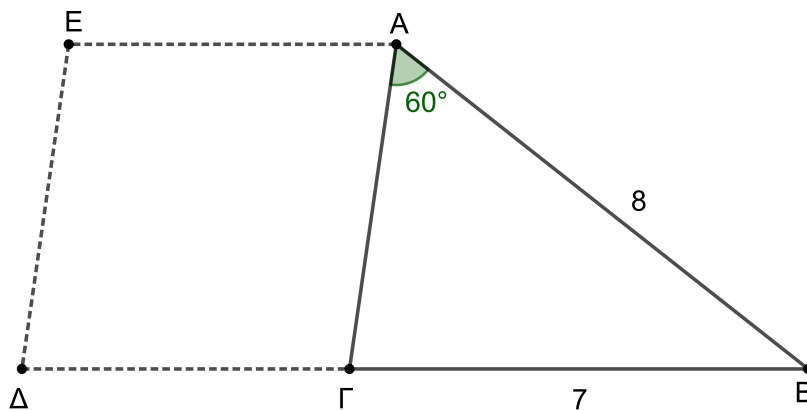
β) Έστω ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι οξυγώνιο όπως στο παρακάτω σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = 5$ . (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου είναι  $(AB\Gamma) = 10\sqrt{3}$ . (Μονάδες 6)

iii. Προεκτείνουμε τη  $B\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma\Delta = A\Gamma$  και σχηματίζουμε τον ρόμβο  $A\Gamma\Delta E$ .

Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου  $A\Gamma\Delta E$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 22375

## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην πλευρά  $B\Gamma$  παίρνουμε σημείο  $K$  ώστε  $KB = 2K\Gamma$  και στο ευθύγραμμο τμήμα  $AK$  παίρνουμε σημείο  $\Lambda$  ώστε  $\Lambda A = 2\Lambda K$ . Έστω  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  και  $E_4$  τα εμβαδά των τριγώνων  $A\Lambda\Gamma$ ,  $\Gamma\Lambda K$ ,  $B\Lambda K$  και  $A\Lambda B$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $\frac{E_1}{E_2} = 2$  και  $\frac{E_4}{E_3} = 2$ .

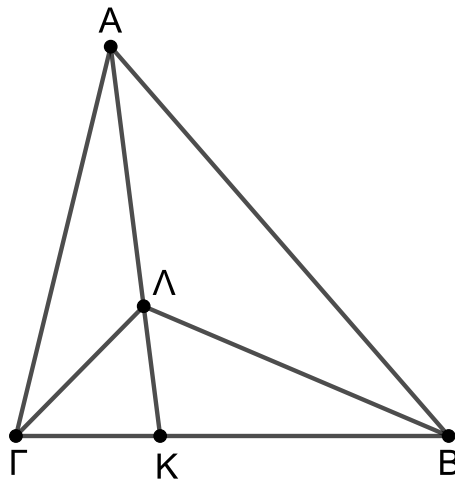
(Μονάδες 10)

ii.  $E_1 = E_3$ .

(Μονάδες 8)

β) Αν  $E_1 = 10$ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 7)



Θέμα 22380

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$  και  $B\Gamma = 16$ ,  $\Gamma\Delta = 22$  και  $A\Delta = 20$ . Έστω  $K$  η προβολή του σημείου  $A$  πάνω στην ευθεία  $\Gamma\Delta$  και  $\Lambda$  η προβολή του σημείου  $B$  πάνω στη ευθεία  $A\Delta$ .

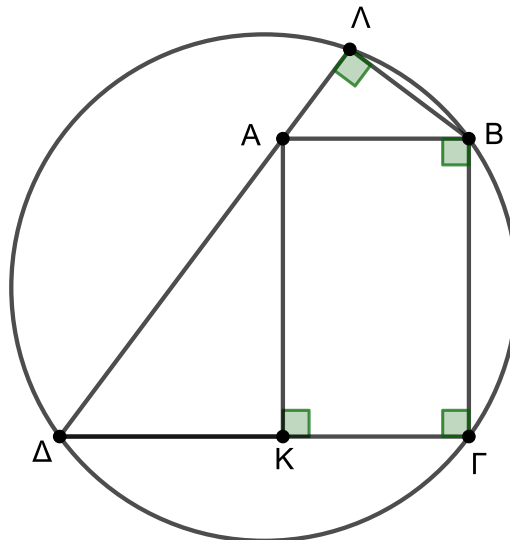
α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $K\Delta = 12$ , (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του τριγώνου  $AK\Delta$  είναι 96. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AK\Delta$  και  $B\Lambda A$  είναι όμοια και να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $B\Lambda A$ . (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέτρου του περιγεγραμμένου κύκλου του τετραπλεύρου  $B\Gamma\Delta\Lambda$ . (Μονάδες 5)



Θέμα 22389

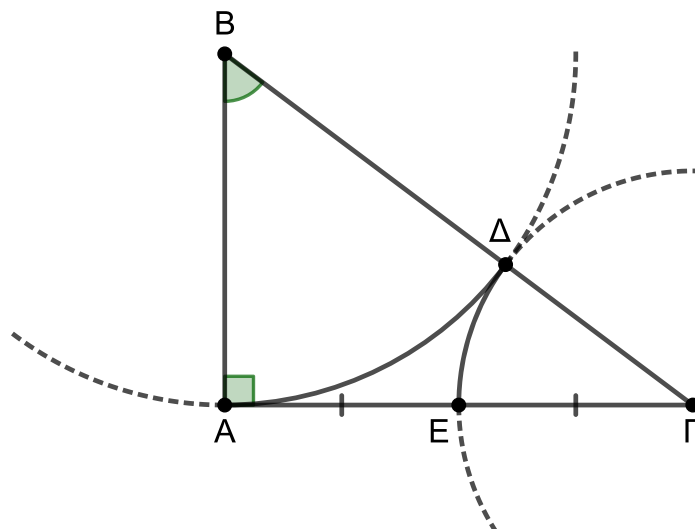
## ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{A} = 90^\circ$ . Με κέντρο το σημείο  $B$  και ακτίνα  $R = BA$  γράφουμε τον κύκλο  $(B, R)$  ο οποίος τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο σημείο  $\Delta$ . Με κέντρο το σημείο  $\Gamma$  και ακτίνα  $\rho = \Gamma\Delta$  γράφουμε τον κύκλο  $(\Gamma, \rho)$  ο οποίος τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ . Έστω ότι το  $E$  είναι το μέσο της  $A\Gamma$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\rho = \frac{2}{3}R$ . (Μονάδες 8)

β) Έστω  $E_1$  το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  και  $E_2$  το εμβαδόν του κύκλου  $(B, R)$ . Να αποδείξετε ότι  $\frac{E_2}{E_1} = \frac{3\pi}{2}$ . (Μονάδες 8)

γ) Έστω  $\widehat{B} = \mu^\circ$  και  $E_3$  και  $E_4$  είναι το εμβαδά των κυκλικών τομέων  $B\widehat{A}\Delta$  και  $\Gamma\widehat{\Delta}E$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $\frac{E_4}{E_3} = \frac{4(90-\mu)}{9\mu}$ . (Μονάδες 9)



Θέμα 22396

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα, δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και έστω  $\Delta$  η προβολή του σημείου  $B$  πάνω στην ευθεία  $A\Gamma$ . Έστω  $A\Delta = 3$  και  $\Delta\Gamma = 2$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $B\Delta = 4$ . (Μονάδες 6)

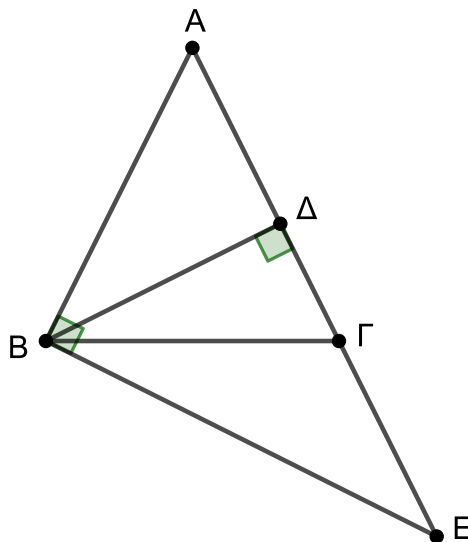
ii.  $(AB\Gamma) = 10$ . (Μονάδες 6)

β) Έστω ότι η κάθετη της  $AB$  στο σημείο  $B$ , τέμνει την προέκταση της  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

Να βρείτε:

i. Το μήκος του  $\Delta E$ . (Μονάδες 6)

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου  $B\Gamma E$ . (Μονάδες 7)



Θέμα 22400

## ΘΕΜΑ 4

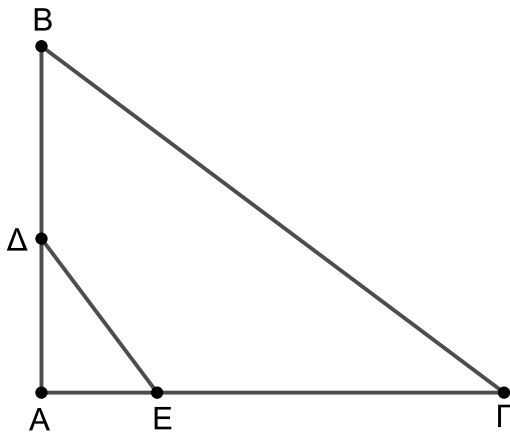
Τα Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, ενός τριγώνου ΑΒΓ. Δίνεται ότι  $AB = 9$ ,  $AG = 12$ ,  $AD = 4$  και  $AE = 3$ .

α) Έστω ότι στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $BΓ = 15$ , (Σχήμα 1). Να αποδείξετε ότι:

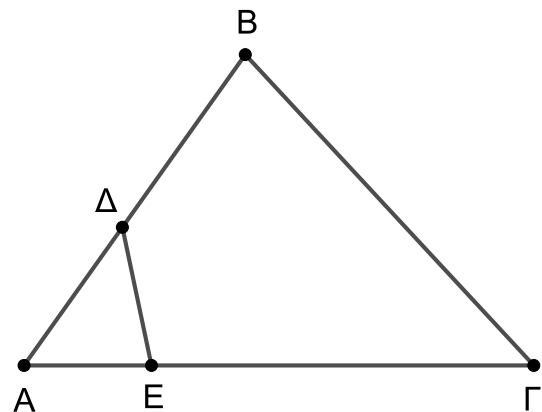
- i. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 7)
- ii.  $ΔΕ = 5$ . (Μονάδες 6)

β) Έστω τώρα ότι στο αρχικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $BΓ = 10$ , (Σχήμα 2). Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο ΑΒΓ δεν είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)
- ii.  $ΔΕ = \frac{10}{3}$ . (Μονάδες 6)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Θέμα 22404

## ΘΕΜΑ 4

Το σημείο  $M$  διαιρεί εσωτερικά την πλευρά  $B\Gamma$  ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  σε λόγο  $\frac{MB}{M\Gamma}$  και το

σημείο  $N$  διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα  $AM$  σε λόγο  $\frac{NA}{NM}$ .

α) Έστω  $\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{1}{3}$  και  $\frac{NA}{NM} = \frac{1}{4}$ . Να αποδείξετε ότι:

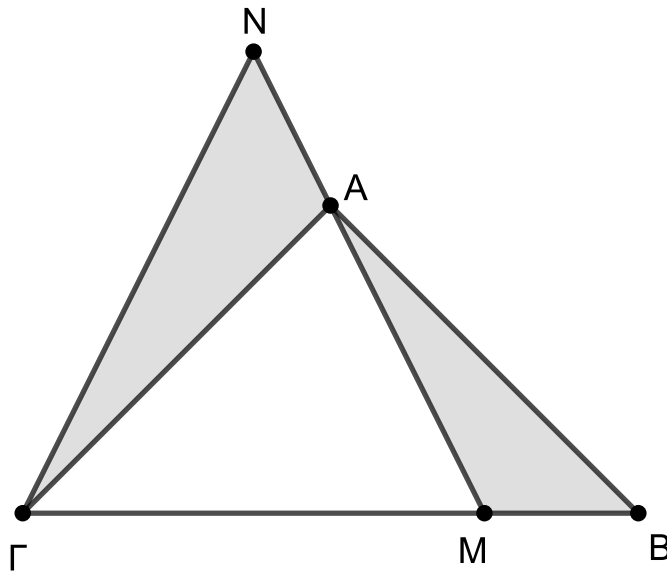
i.  $\frac{(AMB)}{(AM\Gamma)} = \frac{1}{3}$ . (Μονάδες 7)

ii.  $\frac{NA}{AM} = \frac{1}{3}$ . (Μονάδες 6)

iii.  $(AMB) = (AN\Gamma)$ . (Μονάδες 6)

β) Έστω  $\frac{MB}{M\Gamma} = 1$  και  $(AMB) = (AN\Gamma)$ . Να βρείτε τον λόγο  $\frac{NA}{NM}$  στον οποίο το σημείο  $N$

διαιρεί εξωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα  $AM$ . (Μονάδες 6)



Θέμα 22406

## ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ και επίσης είναι  $B\Gamma = 2AB$ .

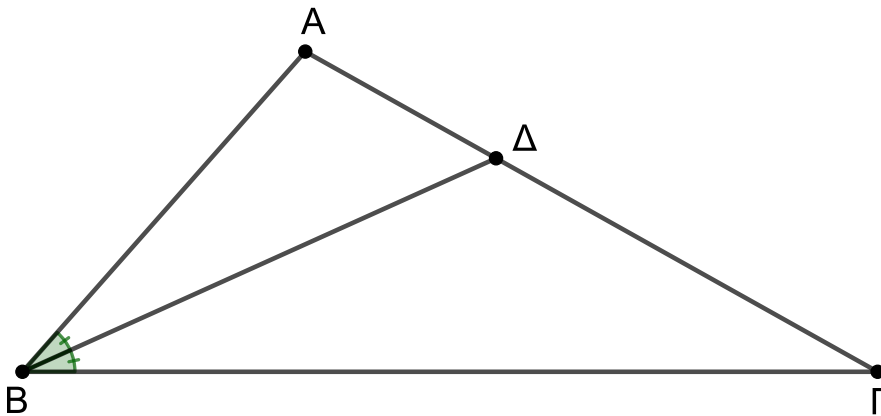
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ είναι διπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΔ. (Μονάδες 6)

β) Να χωρίσετε το τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα. (Μονάδες 6)

γ) Έστω ότι  $AB = 12$  και  $\eta\mu B = \frac{3}{4}$ .

i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι 108. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΔΒΓ και ΑΒΔ. (Μονάδες 6)



Θέμα 22407

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα η  $A\Delta$  είναι διχοτόμος του τριγώνου  $AB\Gamma$  και η  $AK$  είναι η προβολή της πλευράς  $A\Gamma$  πάνω στην ευθεία  $AB$ . Δίνονται  $AB = 10$ ,  $A\Gamma = 15$  και  $AK = 9$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

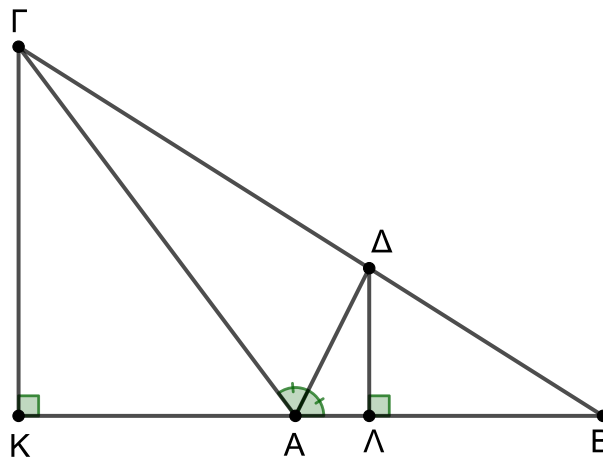
i.  $\Gamma K = 12$  και  $(AB\Gamma) = 60$ . (Μονάδες 8)

ii.  $(A\Delta B) = 24$  και  $(A\Delta\Gamma) = 36$ . (Μονάδες 10)

β) Έστω  $\Lambda$  η προβολή του σημείου  $\Delta$  πάνω στην ευθεία  $AB$ .

i. Να αποδείξετε ότι  $\frac{\Delta\Lambda}{\Gamma K} = \frac{2}{5}$ . (Μονάδες 3)

ii. Να βρείτε τον λόγο  $\frac{\Lambda B}{\Lambda K}$  στον οποίο το σημείο  $\Lambda$  διαιρεί εσωτερικά το ευθύγραμμο τμήμα  $BK$ . (Μονάδες 4)



Θέμα 22509

## ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 2\alpha$  και  $A\Delta = \alpha$ . Στην πλευρά  $AB$  θεωρούμε σημείο  $M$  με  $MB = x$  και στην προέκταση της  $A\Delta$  σημείο  $N$  με  $\Delta N = 2x$ .

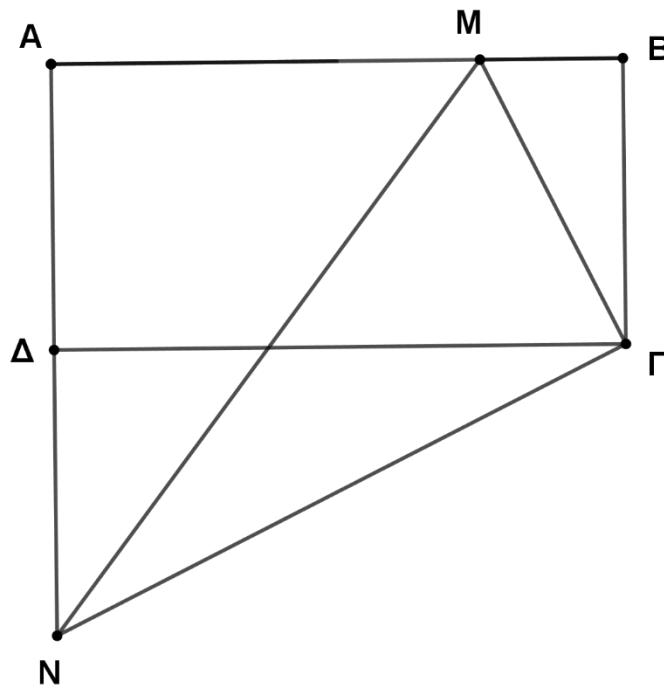
α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των  $\alpha, x$  τα  $M\Gamma^2$ ,  $N\Gamma^2$  και  $MN^2$ . (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $MN\Gamma$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει των  $\alpha, x$  τα εμβαδά των τριγώνων  $AMN$  και  $\Gamma MN$ .

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τη θέση του σημείου  $M$ , πάνω στην  $AB$  ώστε τα τρίγωνα  $AMN$  και  $\Gamma MN$  να είναι ισεμβαδικά. (Μονάδες 5)



Θέμα 22510

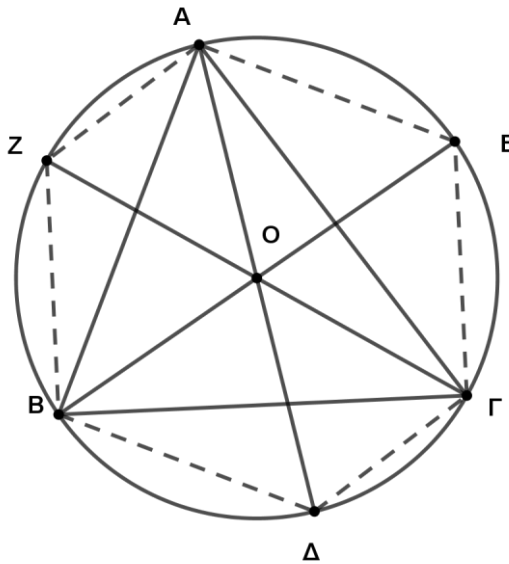
ΘΕΜΑ 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου  $O$ . Θεωρούμε τις διαμέτρους  $A\Delta$ ,  $BE$  και  $\Gamma Z$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $(AOB) = (BO\Delta)$  και  $(AO\Gamma) = (\Delta O\Gamma)$  (Μονάδες 8)

β)  $(B\Delta\Gamma) = (AOB) + (AO\Gamma) - (BO\Gamma)$  (Μονάδες 8)

γ)  $(AZB\Delta\Gamma E) = 2(AB\Gamma)$  (Μονάδες 9)



Θέμα 22511

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = 2$ ,  $AG = 3$  και  $\hat{A} = 60^\circ$ . Να υπολογίσετε:

- α) το μήκος της πλευράς ΒΓ. (Μονάδες 9)
- β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (Μονάδες 8)
- γ) το ύψος  $u_\alpha$ . (Μονάδες 8)

Θέμα 22512

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B\Gamma = 4$ ,  $A\Gamma = 2$  και  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ .

α) Να υπολογίσετε την πλευρά  $AB$ .

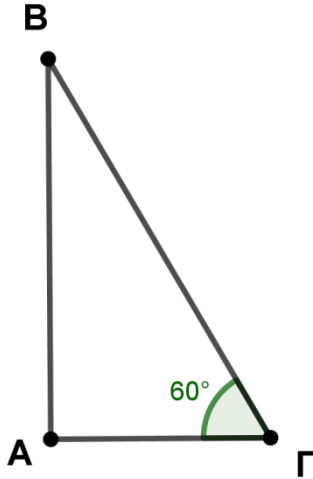
(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 8)



Θέμα 22513

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = 12$ ,  $AG = 5$  και  $BΓ = 13$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\widehat{A} = 90^\circ$ .

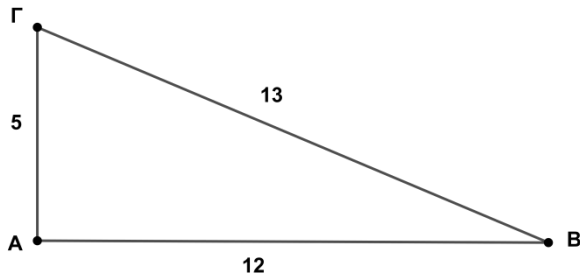
(Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το ύψος  $u_\alpha$ .

(Μονάδες 9)

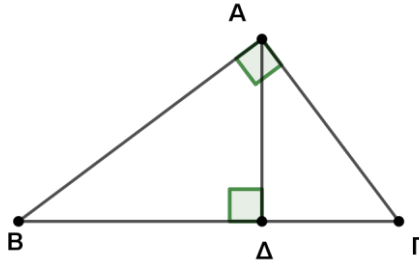


Θέμα 22514

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $B\Gamma = 5$  και  $AB = 4$ . Να υπολογίσετε:

- α) την πλευρά  $A\Gamma$ . (Μονάδες 9)  
β) την προβολή της πλευράς  $AB$  πάνω στη  $B\Gamma$ . (Μονάδες 8)  
γ) το ύψος  $A\Delta$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 22565

## ΘΕΜΑ 4

Οι μαθητές θέλοντας να μετρήσουν την απόσταση των σημείων Α και Β στην αυλή του σχολείου τους μεταξύ των οποίων παρεμβάλλεται ένα κτίσμα και η απευθείας μέτρηση του μήκους ΑΒ είναι αδύνατη, εργάστηκαν ως εξής. Στην αυλή τους επέλεξαν σημείο Ο ώστε η μέτρηση των τμημάτων ΟΑ και ΟΒ να είναι εφικτή, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μέτρησαν και βρήκαν  $OA=20m$  και  $OB=30m$ . Στις ΟΑ και ΟΒ πήραν σημεία Γ και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε  $OG=2m$  και  $OD=3m$ .

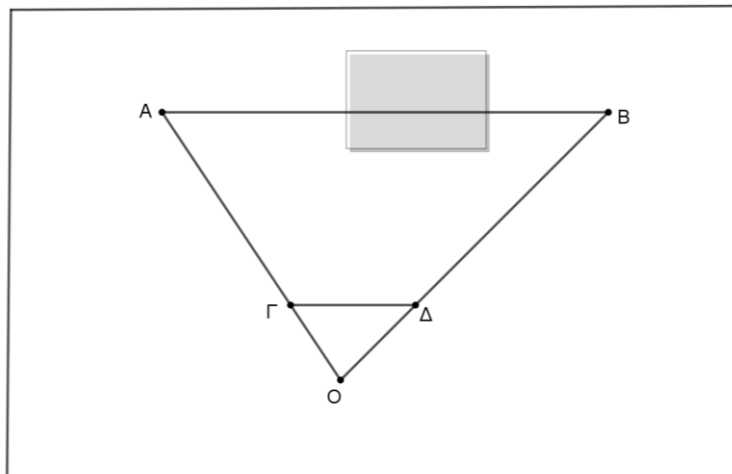
α) Να αποδείξετε ότι:

- i. η ΓΔ είναι παράλληλη με την ΑΒ, (Μονάδες 8)
- ii. τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΑΒ είναι όμοια. (Μονάδες 7)

β) Ένας από τους μαθητές υποστηρίζει ότι μπορούν να υπολογίσουν την απόσταση των σημείων Α και Β αν γνωρίζουν την απόσταση των δύο σημείων Γ και Δ.

Είναι ο ισχυρισμός του μαθητή αληθής; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)



Θέμα 22568

## ΘΕΜΑ 4

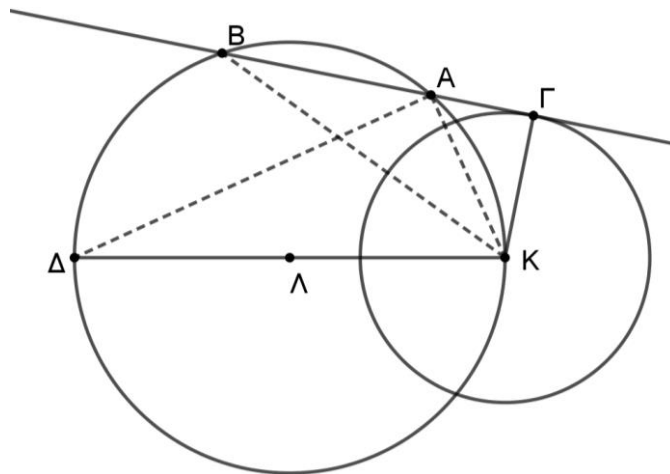
Δίνεται κύκλος με κέντρο το σημείο  $\Lambda$  και ακτίνα  $R=10$ , ο οποίος διέρχεται από το κέντρο ενός άλλου κύκλου με κέντρο το σημείο  $K$  και ακτίνα  $\rho=6$ . Η εφαπτομένη του κύκλου  $(K,\rho)$  στο σημείο του  $\Gamma$  τέμνει τον κύκλο  $(\Lambda,R)$  στα σημεία  $A$  και  $B$ . Η προέκταση της  $K\Lambda$  προς το  $\Lambda$  τέμνει τον κύκλο  $(\Lambda,R)$  στο σημείο  $\Delta$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα  $K\Gamma B$  και  $K\Lambda\Delta$  είναι όμοια. (Μονάδες 8)

ii.  $KA \cdot KB = 120$  (Μονάδες 9)

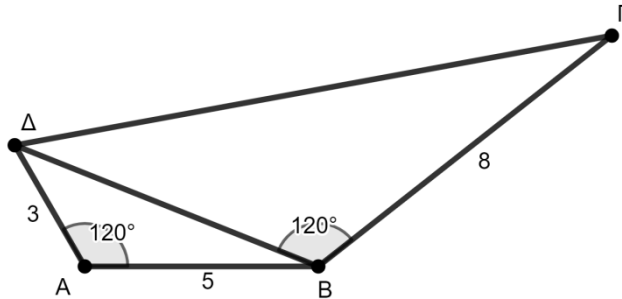
β) Αν είναι  $KB=15$ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $ΑΓΚ$ . (Μονάδες 8)



Θέμα 29784

## ΘΕΜΑ 2

Στο τετράπλευρο του παρακάτω σχήματος έχουμε για τις πλευρές  $AB=5$ ,  $B\Gamma=8$ ,  $A\Delta=3$  και για τις γωνίες  $\widehat{\Delta AB} = 120^\circ$  όπως και  $\widehat{\Delta B\Gamma} = 120^\circ$ .

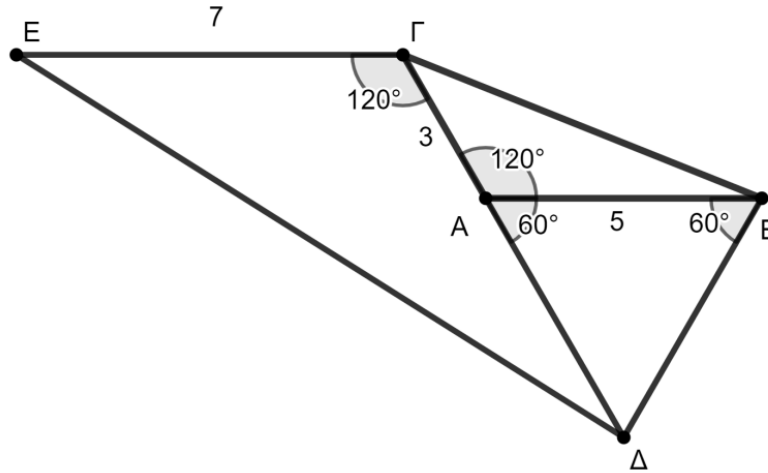


- α) Να δείξετε ότι το μήκος της  $B\Delta$  είναι 7 μονάδες . (Μονάδες 8)
- β) Να υπολογίσετε το μήκος της  $\Gamma\Delta$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου  $\Gamma B\Delta$ . (Μονάδες 9)

Θέμα 29786

ΘΕΜΑ 2

Στο σχήμα που ακολουθεί δίνονται  $AB=5$  ,  $AG=3$  και  $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 120^\circ = \widehat{E\hat{\Gamma}\Delta}$  καθώς και  $\widehat{B\hat{A}\Delta} = 60^\circ = \widehat{A\hat{B}\Delta}$ .



- |  |             |
|--|-------------|
| α) Να υπολογίσετε το μήκος της ΒΓ.                     | (Μονάδες 7) |
| β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΔ.                     | (Μονάδες 4) |
| γ) Να υπολογίσετε το μήκος της ΔΕ.                     | (Μονάδες 7) |
| δ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τετραπλεύρου ΒΓΕΔ. | (Μονάδες 7) |

Θέμα 29849

## ΘΕΜΑ 3

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $AB = A\Gamma = 6$  και  $B\Gamma = 8$ .

α) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογιστεί το εμβαδό του. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε:

- i. την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$
- ii. την ακτίνα  $R$  του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 12)

Θέμα 29850

## ΘΕΜΑ 3

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $AB = A\Gamma = 5$  και  $B\Gamma = 6$ .

α) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογιστεί το εμβαδό του. (Μονάδες 10)

γ) Στην προέκταση της πλευράς  $GA$  παίρνουμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = 10$ .

Να υπολογισθεί το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Delta$ . (Μονάδες 10)